



В. Д. Кукин

# **Потоковая задача Штейнера Эволюционный подход**

Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр Российской академии наук»  
Институт прикладных математических  
исследований КарНЦ РАН

В.Д. Кукин

# **Потоковая задача Штейнера Эволюционный подход**

*Учебное пособие*

Петрозаводск  
2021

УДК 519.144.1

ББК 22.176

К90

Рецензент

д. ф.-м. н., проф. *Ю.Л. Павлов*

**Кукин, Валерий Дмитриевич.**

К90 Поточковая задача Штейнера. Эволюционный подход : учебное пособие / В.Д. Кукин. – Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2021. – 59 с. : табл. 4, ил. 23. Библиограф. 40 назв.

ISBN 978-5-9274-0905-1

Рассматривается эволюционный подход к решению дискретно-непрерывной потоковой задачи Штейнера для транспортной сети. Обобщаются результаты исследований, проведённых автором во время работы в ИПМИ КарНЦ РАН. Учебное пособие может быть полезно всем, кто занимается приложением этой задачи к коммуникационным сетям.

УДК 519.144.1

ББК 22.176

ISBN 978-5-9274-0905-1

© Кукин В.Д., 2021

© ИПМИ КарНЦ РАН, 2021

© ФИЦ «Карельский  
научный центр РАН», 2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Список сокращений . . . . .	4
<b>Введение . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>I ЕВКЛИДОВА И ПОТОКОВАЯ ЗАДАЧИ ШТЕЙНЕРА . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1. Евклидова задача Штейнера . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1. История задачи . . . . .	6
1.2. Основные понятия и определения . . . . .	7
1.3. Математическая модель . . . . .	9
1.4. Относительно минимальные деревья Штейнера . . . . .	9
1.4.1. Интерпретация деревьев . . . . .	9
1.4.2. Геометрические свойства ОМДП . . . . .	11
1.5. Геометрические свойства ДПП . . . . .	12
1.6. Топологические свойства ДПП . . . . .	13
1.7. Гипотеза Гилберта-Поллака . . . . .	14
<b>2. Потокковая задача Штейнера . . . . .</b>	<b>14</b>
2.1. Интерпретация происхождения задачи . . . . .	14
2.2. Свойства деревьев Штейнера . . . . .	15
2.3. Математическая модель для транспортной сети . . . . .	18
<b>II ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПОТОКОВОЙ ЗАДАЧЕ ШТЕЙНЕРА . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>1. Эволюционная модель . . . . .</b>	<b>20</b>
1.1. Описание модели . . . . .	20
1.2. Параметры модели . . . . .	23
<b>2. Композитный эволюционный алгоритм . . . . .</b>	<b>25</b>
2.1. Схема алгоритма . . . . .	25
2.2. Вычислительные эксперименты . . . . .	27
<b>3. Генетические операторы . . . . .</b>	<b>32</b>
3.1. Кодирование полных топологий . . . . .	32
3.2. Эвристики для генетических операторов . . . . .	36
3.3. Виды генетических операторов . . . . .	40
<b>4. Гипотеза о «большой долине» . . . . .</b>	<b>42</b>
4.1. Устойчивость решений задачи . . . . .	43
4.2. Формализация ландшафта «большой долины» . . . . .	44
4.3. Вычислительные эксперименты . . . . .	46
<b>5. Задача поиска деревьев Штейнера . . . . .</b>	<b>49</b>
5.1. Выбор метода решения задачи . . . . .	50
5.2. Эволюционная модель . . . . .	50
5.3. Вещественный оператор развития . . . . .	51
5.4. Вещественный эволюционный алгоритм . . . . .	53
Литература . . . . .	56
Список таблиц . . . . .	59
Список иллюстраций . . . . .	59

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ГА – генетический алгоритм

ВГА – вещественный генетический алгоритм

ДШ – дерево Штейнера

ЛМДШ – локально минимальное дерево Штейнера

МДШ – минимальное дерево Штейнера

ОМДШ – относительно минимальное дерево Штейнера

ЗШ – задача Штейнера

ЕЗШ – евклидова задача Штейнера

ОД – остовное дерево

МОД – минимальное остовное дерево

ТШ – точка Штейнера

ЭА – эволюционный алгоритм

ВЭА – вещественный эволюционный алгоритм

GAP – Gilbert Arborescence Problem (задача о дереве Гилберта)

GNP – Gilbert Network Problem (задача о сети Гилберта)

SMTTP – Steiner Minimal Tree Problem (задача о минимальном дереве Штейнера)

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема Штейнера и её обобщения представляют большое семейство задач оптимизации. Особое место среди них занимают задачи Штейнера (ЗШ) на плоскости: евклидова ЗШ (ЕЗШ); ЗШ с прямоугольной (манхэттеновской) метрикой; ЗШ на графе [1, 2]. Настоящее пособие посвящено обобщению ЕЗШ, а именно, потоковой задаче Штейнера и эволюционным методам её решения. В первой главе приведены основные понятия, определения и математические модели для евклидовой и потоковой ЗШ. Во второй главе рассмотрены: эволюционная модель и композитный эволюционный алгоритм для потоковой ЗШ; оригинальные генетические операторы; гипотеза о «большой долине»; вещественный эволюционный алгоритм для поиска деревьев Штейнера. Обе главы содержат иллюстрации и результаты экспериментов.

## ГЛАВА I

### ЕВКЛИДОВА И ПОТОКОВАЯ ЗАДАЧИ ШТЕЙНЕРА

#### 1. Евклидова задача Штейнера

##### 1.1. История задачи

В 17-м веке итальянский математик П. Ферма (1601–1665) сформулировал следующую задачу [3]. Найти на плоскости такую точку, суммарное расстояние от которой до трех заданных точек минимально. Эта задача и искомая точка носят имя Ферма. Итальянцы Э. Торричелли (1608–1647) и Б. Кавальери (1597–1647) независимо друг от друга нашли геометрический способ построения точки Ферма [4, 5]. Т. Симпсон (1710–1761) исследовал особенности задачи и предложил другой способ построения такой точки [6]. Начав с задачи об уличной сети для трёх деревень, т. е. с задачи Ферма, швейцарский математик Я. Штейнер (1796–1863) обобщил её для сети из  $n > 3$  заданных точек и одной дополнительной точки  $s$ . В 1934 г. чешские математики В. Ярник (1897–1970) и О. Кесслер рассмотрели задачу о кратчайшей сети для  $n > 3$  заданных и  $s > 1$  дополнительных точек плоскости [7]. Учитывая, что такая сеть является деревом, задачу стали называть задачей о кратчайшем дереве.

В США в 50-е годы вышла книга Р. Куранта (1888–1972) и Г. Роббинса (1915–2001) «Что такое математика?» [8]. В ней авторы привели своё обобщение задачи об уличной сети для  $n > 3$  и  $s > 1$ , взяв за основу случай, рассмотренный Я. Штейнером. Благодаря изданию книги во многих странах это обобщение стало широко известно. Вероятно, из-за ссылки авторов на работу Я. Штейнера его стали называть задачей Штейнера (the Steiner Problem).

В 70-е годы была опубликована работа Э. Гилберта (1923–2013) и Г. Поллака (р. 1927) о минимальных деревьях Штейнера. Авторы ввели определения основных видов деревьев Штейнера и доказали их геометрические свойства [9]. В результате появилось новое название – задача о минимальном дереве Штейнера (the Steiner Minimal Tree Problem, SMTP).

В настоящее время эту задачу Штейнера называют классической или геометрической, чтобы выделить из большого множества её модификаций и обобщений.

## 1.2. Основные понятия и определения

Чтобы описать множество решений евклидовой задачи Штейнера, используем понятия и терминологию, известные из работы Э. Гилберта и Г. Поллака [9] и теории графов [10].

Эта задача Штейнера рассматривает *неориентированные деревья*, т. е. *простые ациклические связные неориентированные графы на евклидовой плоскости*. Такие деревья не содержат кратных ребер, петель, циклов и изолированных вершин [10]. *Вершины дерева* представляют собой точки евклидовой плоскости, *рёбра* – отрезки прямой линии. Далее предполагаем, что множество вершин конечно, хотя и может быть очень большим.

*Смежными рёбрами* дерева считают те, что имеют общую вершину; *смежными вершинами* дерева – те, что связаны ребром. Вершину и ребро, концом которого она является, называют *инцидентными*. Количество рёбер, инцидентных вершине, называют *степенью вершины*.

Кроме множеств вершин  $V$  и рёбер  $E$ , дерево определяет *топология* – *отношение инцидентности между вершинами и ребрами дерева*. Формально *топология* – это отображение декартова произведения множества вершин  $V \times V$  дерева на множество  $E$  его рёбер.

Рёбрам приписывают *длины* – евклидовы расстояния между их конечными точками; *длиной дерева* считают сумму длин всех его рёбер. Отметим две операции, изменяющие длину дерева. При *стягивании рёбер* из дерева удаляются рёбра вместе с конечными точками. В результате появляются *вырожденные (нулевой длины) рёбра* и содержащие их *вырожденные деревья*. При *расщеплении вершин* дерева разрываются их связи с инцидентными рёбрами; вводятся дополнительные точки плоскости; затем восстанавливается связность дерева.

В зависимости от состава вершин различают два вида деревьев. *Остовным деревом (ОД)* называют такое, множество вершин которого состоит из заданных точек плоскости. *Минимальное остовное дерево (МОД)* – дерево минимальной длины среди всех ОД для множества заданных точек плоскости. Его длина зависит только от топологии дерева.



После расщепления множество вершин дерева состоит из двух непересекающихся множеств. Одно включает заданные точки плоскости, называемые *терминальными вершинами (терминалами)*; другое – дополнительные свободно размещаемые на плоскости точки, называемые *точками Штейнера (ТШ)*. Длина такого дерева зависит от топологии и координат ТШ.

Э. Гилберт и Г. Поллак определили основные виды деревьев, содержащих ТШ [9]. *Дерево Штейнера (ДШ)* – дерево, связывающее множество точек плоскости, длину которого нельзя уменьшить ни расщеплением вершин, ни малым возмущением координат ТШ. *Относительно минимальное ДШ (ОМДШ)* – дерево минимальной длины на множестве деревьев с заданной топологией. *Минимальное дерево Штейнера (МДШ)* – ДШ минимальной длины на множестве всех топологий для заданных точек плоскости. МДШ является *глобально оптимальным* деревом на множестве всех топологий. *Локально минимальным деревом Штейнера (ЛМДШ)* считают ДШ, оптимальное на некотором подмножестве топологий.

Топологию и соответствующее ДШ называют *полными*, если количество ТШ в них максимально, т. е. равно  $n - 2$ , где  $n$  – число терминальных вершин дерева. Понятия полного ДШ и ОМДШ эквивалентны: они определяют одно и то же дерево. Для полных ДШ будем использовать следующие альтернативные определения. ДШ – это дерево с координатами ТШ, оптимальными для заданной топологии. МДШ – минимальное ДШ с топологией, оптимальной на множестве всех топологий для заданных точек плоскости.

Не нарушая общности подхода, можно рассматривать только полные деревья. Если *топология неполная*, дерево можно представить в виде объединения *полных компонентов* – полных деревьев меньшего размера. Дерево на рис. 1 содержит  $n = 7$  терминальных вершин и  $s = 3$  точек Штейнера. Оно имеет три полных компонента, отмеченных квадратными метками.

Деревья рассматриваются на евклидовой плоскости. Это двумерное метрическое пространство  $(R^2, l_2)$  с евклидовой метрикой  $l_2$ , в котором согласно аксиоме тождества расстояние между двумя различными точками не может быть равным нулю. Таким образом, множество решений евклидовой задачи представляют невырожденные полные неориентированные деревья.

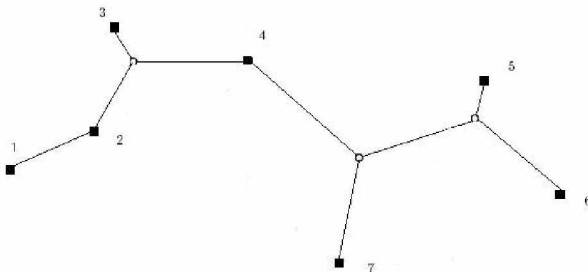


Рис. 1. Дерево с тремя полными компонентами

### 1.3. Математическая модель

Пусть  $U = (V, D_\tau, I)$  – дерево с топологией  $\tau \in T$ , где  $V$  и  $D_\tau = \{(i, j) \mid i, j \in V\}$  – множества вершин и рёбер дерева;  $T$  – множество топологий, заданное отображением инцидентности  $I: V \times V \rightarrow D$ . Множество  $V = V_0 \cup V_S$ ,  $V_0 \cap V_S = \emptyset$ ,  $|V| = |V_0| + |V_S| = n + s$ , где  $V_0$  и  $V_S$  – терминальные вершины и ТШ;  $X = X_0 \cup X_S$ , где  $X_0 = \{(x_i, y_i) \mid x_i, y_i \in R^+\}$  и  $X_S = \{(x_i, y_i) \mid x_i, y_i \in R^+\}$  – координаты терминальных вершин и ТШ. Сопоставим рёбрам  $(i, j) \in D_\tau$  их длины  $l_{(i, j)} = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{1/2}$ . Требуется найти  $(\tau, X_S)$  – топологию и координаты ТШ, при которых длина  $L(U)$  дерева  $U$  минимальна.

Математическая модель евклидовой задачи Штейнера имеет вид:

$$L(U) = \sum_{\tau \in T, (i, j) \in D_\tau} l_{(i, j)} \rightarrow \min_{(\tau, X_S) \in T \times R^2}.$$

Это модель дискретно-непрерывной задачи Штейнера, в которой МДШ однозначно представляют топология дерева и координаты ТШ. При их нахождении важную роль играют геометрические свойства ДШ. Рассмотрим их, следуя работе Э. Гилберта и Г. Поллака [9].

### 1.4. Относительно минимальные деревья Штейнера

#### 1.4.1. Интерпретация деревьев

Дерево Штейнера можно интерпретировать как некоторую механическую систему, потенциальная энергия которой равна сумме расстояний между смежными вершинами дерева. Если дерево имеет

относительно минимальную длину, т. е. является ОМДШ, система находится в состоянии устойчивого равновесия. Рассмотрим две известные модели таких систем [2].

На рис. 2 показана струнная модель (string model). Это прозрачная пластина с отверстиями, через которые пропущены струны одинаковой длины с равными грузами на концах. Отверстия представляют терминальные вершины дерева; кольца, свободно перемещаемые по поверхности пластины, – ТШ; струны, прикрепленные к кольцам, – рёбра дерева. За счёт перемещения колец можно привести систему в состояние устойчивого равновесия, тогда полученное дерево будет ОМДШ с известной топологией.

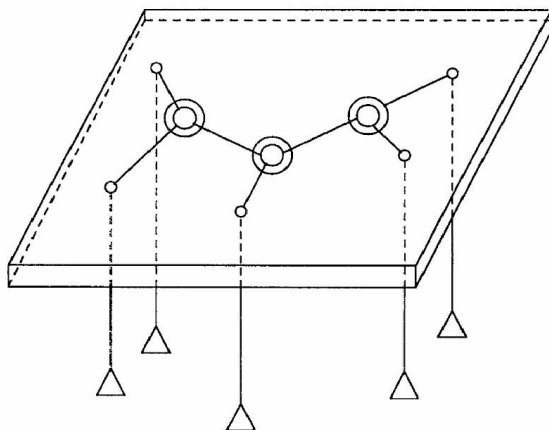


Рис. 2. Струнная модель

На рис. 3 изображена модель мыльной пленки (soap film model). Она состоит из двух прозрачных параллельных пластин. В фиксированных точках они соединены стержнями, концы которых соответствуют терминальным вершинам. После извлечения конструкции из мыльного раствора между пластинами образуется плёнка, которая стремится занять устойчивое положение с минимальной площадью поверхности. Она ограничена концами стержней и «следами», оставленными плёнкой на пластинах. Оба «следа» конгруэнтны и представляют ОМДШ с заранее неизвестной топологией на заданном множестве терминалов.

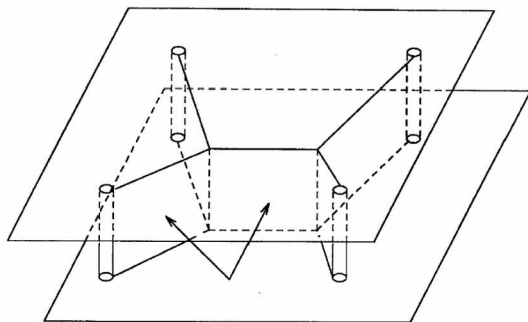


Рис. 3. Модель мыльной плёнки

Поиск МДШ с помощью таких моделей имеет серьёзные недостатки. С ростом числа терминалов резко возрастает время поиска, а найденное ОМДШ, необязательно будет МДШ.

#### 1.4.2. Геометрические свойства ОМДШ

Пусть  $U = \{U_\tau\}$  – множество ДШ с заданной топологией  $\tau \in T$ ;  $U' = \{U'_\tau\}$  – подмножество ОМДШ в  $U$ ;  $|U'|$  – мощность подмножества  $U'$ . Справедливы следующие утверждения [9].

1. Все ТШ в  $U'_\tau \in U'$  принадлежат выпуклой оболочке множества  $V_0$  терминалов дерева.
2.  $|U'| \leq 1$ . Если  $U' \neq \emptyset$ , то  $|U'| = 1$ .

Свойство 1 является достаточным условием, при котором дерево является ОМДШ. Свойство 2 утверждает, что множество деревьев с заданной топологией может иметь единственное ОМДШ или не иметь ни одного. На рис. 4а и 4б показаны полные деревья ( $n = 4$  и  $s = 2$ ) с одинаковой топологией, причём дерево на рис. 4б минимальной длины. Вследствие вырожденности ( $|s_1 - s_2| = 0$ ) оно не является ОМДШ для множества деревьев с такой топологией.

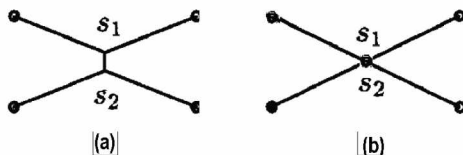


Рис. 4. Два дерева с одинаковой топологией

Учитывая, что МДШ является ДШ, а ДШ – ОМДШ среди деревьев с одинаковой топологией, можно искать МДШ среди ОМДШ, перечисляя топологии последних.

### 1.5. Геометрические свойства ДШ

Деревья Штейнера обладают следующими геометрическими свойствами [9]:

1. множество вершин дерева  $V = V_0 \cup V_S$ ,  $V_0 \cap V_S = \emptyset$ , где  $V_0$  и  $V_S$  – множества терминальных вершин и ТШ соответственно;
2. для множества ТШ справедливо неравенство  $|V_S| \leq n - 2$ ; если ДШ полное,  $|V_S| = n - 2$ ;
3. число вершин и рёбер дерева соответственно равны:  $|V| = n + s$ ,  $|D| = n + s - 1$ . Если  $U$  – полное дерево, то  $|V| = 2n - 2$ ,  $|D| = 2n - 3$ ;
4. степени вершин дерева ограничены:  $\deg(i) \leq 3 \quad \forall i \in V_0$ ,  $\deg(j) = 3 \quad \forall j \in V_S$ .

Свойство 4 можно уточнить для деревьев с конечным множеством элементов. Терминальные вершины таких деревьев всегда концевые. Связями поддеревьев, выделенных в ДШ, можно пренебречь, считая их независимыми объектами. Поэтому  $\deg(i) < 3 \quad \forall i \in V_0$ . Случай  $\deg(i) = 2$  возможен только в вырожденных деревьях. Таким образом, получаем:

- 4'. степени вершин дерева ограничены и равны:  $\deg(i) = 1 \quad \forall i \in V_0$  и  $\deg(j) = 3 \quad \forall j \in V_S$ .

При поиске МДШ в точных (переборных) алгоритмах вместо ОМДШ можно рассматривать полные ДШ. Процедура построения МДШ для таких деревьев была предложена Мелзаком [11] и усовершенствована Кокинэ [12].

Известно необходимое и достаточное условие для МДШ [12]. ДШ является МДШ тогда и только тогда, когда обладает следующими свойствами:

1. множество вершин дерева  $V = V_0 \cup V_S$ ,  $V_0 \cap V_S = \emptyset$ , где  $V_0$  и  $V_S$  – множества терминальных вершин и ТШ соответственно;
2. для ТШ дерева справедливо неравенство  $|V_S| \leq n - 2$ ; в полном ДШ  $|V_S| = n - 2$ ;
3. степени вершин дерева ограничены:  $\deg(i) \leq 3 \quad \forall i \in V_0$ ,  $\deg(j) = 3 \quad \forall j \in V_S$ ;

4.  $\forall j \in V_S$  лежит в треугольнике, образованном смежными вершинами дерева;

5. рёбра  $(i, j) \in D_\tau$  пересекаются только в вершинах  $V$  дерева.

В отличие от ДШ, минимальное ДШ не может иметь пересекающихся рёбер; углы между смежными рёбрами не меньше  $120^\circ$ , а между рёбрами, инцидентными ТШ, равны  $120^\circ$ .

Это необходимое и достаточное условие сложно применять на практике, особенно при решении задач большой размерности. Тем не менее, используя графическую схему ДШ, можно высказать предположение, будет ли оно МДШ. Это условие неприменимо в вырожденном случае расположения терминалов. Если они лежат на отрезке прямой или связаны ломаной линией с углами, близкими к  $180^\circ$ , решением задачи является отрезок прямой или ломаная линия.

## 1.6. Топологические свойства ДШ

Чтобы найти МДШ перечислением полных топологий ДШ, надо знать их число. Э. Гилберт и Г. Поллак [9] получили следующую формулу для подсчёта  $F(n, s)$  – числа топологий дерева для  $n$  терминальных вершин и  $1 \leq s \leq n - 2$  точек Штейнера:

$$F(n, s) = \frac{C_n^{s+2} (n + s - 2)!}{2^s s!}.$$

Формула для подсчета числа полных топологий ДШ имеет вид:

$$F(n, n - 2) = \frac{(2(n - 2))!}{2^{n-2} (n - 2)!}.$$

При поиске МДШ среди полных ДШ общее число перечисляемых топологий уменьшается на много порядков. В табл. 1 даны некоторые значения  $F(n, n - 2)$  для  $n \geq 4$ . При  $n = 2$  ТШ нет, а терминалы связаны одним ребром. При  $n = 3$  имеем одну ТШ и единственную топологию.

Таблица 1

Число полных топологий дерева Штейнера

$N$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F(n, n - 2)$	3	15	105	945	10395	135135	2 027025	34459425	634729075

Евклидова задача Штейнера относится к классу NP-полных задач [13]. С ростом  $n$  число топологий ДШ растет экспоненциально. Это значит, что, вероятно, не существует полиномиального алгоритма, решающего эту задачу за время порядка не выше, чем  $n^k$ , где  $k > 0$  – некоторое целое число. Так как точные (переборные) алгоритмы поиска МДШ неэффективны даже при малых значениях  $n$ , обычно применяют приближённые алгоритмы.

## 1.7. Гипотеза Гилберта-Поллака

В качестве приближенного решения задачи можно использовать минимальное остовное дерево – МОД. Его можно найти с помощью полиномиального алгоритма Краскала [14] или Прима [15]. Известна оценка погрешности такого приближения МДШ.

Пусть  $L_{\text{МДШ}}$  и  $L_{\text{МОД}}$  – длины МДШ и МОД. Для отношения  $L_{\text{МДШ}} / L_{\text{МОД}}$  при  $L_{\text{МДШ}} \neq L_{\text{МОД}}$  справедливо следующее двойное неравенство:

$$\rho \leq L_{\text{МДШ}} / L_{\text{МОД}} < 1,$$

где  $\rho = \inf_n \{\rho_n \mid L_{\text{МДШ}} / L_{\text{МОД}}\}$  – точная нижняя грань по всем  $\rho_n$  для деревьев, терминальные вершины которых есть нетривиальные конечные выборки из  $n$  заданных точек плоскости. Это  $\rho$  называют *отношением Штейнера (the Steiner ratio)*. Очевидно, что найденное решение близко к оптимальному, если значение целевой функции принадлежит полуинтервалу  $[\rho \cdot L_{\text{МОД}}; L_{\text{МОД}})$ .

В 1968 году, используя экспериментальные данные, Э. Гилберт и Г. Поллак высказали гипотезу, что  $\rho = \sqrt{3}/2 = 0.86603$ . Сначала это было доказано для отдельных значений  $n$  [9]. В 1992 Ду и Хванг объявили о доказательстве гипотезы Гилберта-Поллака [16], но из-за обнаруженных в нём лакун вопрос о её справедливости остаётся открытым до сих пор [17].

## 2. Потокосая задача Штейнера

### 2.1. Интерпретация происхождения задачи

Известны две точки зрения относительно происхождения потокосой задачи Штейнера. Некоторые исследователи связывают её с задачей о сети минимальной стоимости с потоками и весами, сформулированной Гилбертом в 70-е годы прошлого века [18]. В этой задаче

между парами источников продукта и пунктов спроса заданы симметричные неотрицательные потоки. На участках сети определена зависящая от потоков неотрицательная возрастающая весовая функция. Участкам сети приписаны взвешенные длины (длины, умноженные на значения весовой функции, или веса). Их считают стоимостями участков, а их сумму – стоимостью сети. Эту задачу называют задачей о сети Гилберта (the Gilbert Network Problem, GNP).

Сеть Гилберта может иметь один сток и множество источников продукта или один источник и множество стоков. Если весовая функция является вогнутой, модель такой сети – *ориентированное дерево с корнем (выделенной вершиной)*. Предполагается полный переток продукта из источников в сток или из источника в стоки и баланс потоков (правило Кирхгофа) в точках ветвления сети. В зарубежной литературе этот случай известен как задача о дереве Гилберта-Штейнера или о дереве Гилберта (the Gilbert Arborescence Problem, GAP).

В отечественной литературе потоковую задачу Штейнера считают обобщением евклидовой задачи Штейнера. Введённые для неё понятия и термины несложно перенести на ориентированные деревья с корнем. Достаточно рёбра заменить дугами, длины рёбер – взвешенными длинами дуг и модифицировать определения ДШ с учетом иного критерия оптимальности.

## 2.2. Свойства деревьев Штейнера

Обсуждая геометрические свойства ДШ в потоковой задаче Штейнера, будем считать, что потоки ориентированы к корню дерева. Это не нарушает общности подхода, так как эта задача инвариантна относительно направления потоков.

Рассмотрим ТШ и смежные с ней вершины  $A_1, A_2, A_3$  (рис. 5). Дуги из  $A_2$  и  $A_3$  входят в ТШ, а исходящая из нее дуга входит в  $A_1$ . Пусть  $w_1, w_2, w_3 > 0$  – веса дуг, зависящие от величины потоков на соответствующих

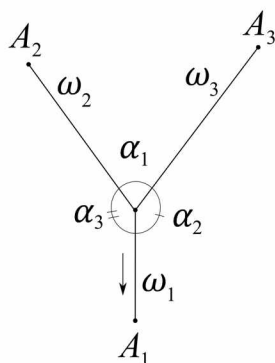


Рис. 5. Углы, образованные дугами с весами  $w_1, w_2, w_3 > 0$



дугах. В [19] получена формула для углов между дугами, инцидентными ТШ. Для угла  $\alpha_1$ , лежащего против исходящей дуги с весом  $\omega_1$ , она имеет вид:

$$\cos \alpha_1 = (\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2) / 2\omega_2\omega_3 \quad (2.1)$$

**Вырождение дуг.** Используя формулу (2.1), покажем, что вырожденные дуги в дереве появляются из-за суммирования потоков в ТШ при оптимизации их положения на плоскости. Эта формула позволяет выделить три следующие ситуации. Если  $\omega_3 + \omega_2 \rightarrow \omega_1$ , то  $\cos \alpha_1 \rightarrow 0$ , и в какой-то момент ТШ совпадет с  $A_1$ , т. е. исходящая дуга вырождается. Ее вырождение неизбежно, даже если  $\omega_2 + \omega_3 > \omega_1$  и  $\cos \alpha_1 < 1$ , но вершина  $A_1$  оказывается внутри угла  $\alpha_1$ , и формула (2.1) не работает. Это происходит, если  $A_1$  — узел, совпадающий с одной из терминальных вершин и уже содержащий по крайней мере одну вырожденную дугу. Если  $\omega_3 + \omega_2 < \omega_1$ , то  $\cos \alpha_1 > 1$ , и формула (2.1) не работает, исходящая дуга также вырождается. Это происходит, когда суммарный поток на ней достигает величины, при которой дискретно возрастает значение весовой функции (например, происходит смена технологической категории на дуге). Введение ТШ становится нецелесообразным. Из анализа ситуаций следует, что вырождение дуг возможно по всему дереву, однако наиболее сильно этот эффект проявляется в прикорневой области, так как из-за суммирования потоков веса дуг растут с приближением к корню дерева.

Вырождение дуг при оптимизации ТШ позволяет рассматривать только полные деревья. К ним всегда можно перейти от деревьев с неполной топологией, считая вырожденные дуги полноправными элементами деревьев.

Таким образом, множество решений потоковой ЗШ включает *полные ориентированные деревья с корнем*, в том числе *вырожденные*. В отличие от евклидовой задачи, они рассматриваются в двумерном псевдометрическом пространстве с соответствующей метрикой. Согласно одной из аксиом в этом пространстве расстояние между двумя различными точками может быть равным нулю. Значит, при поиске МДШ следует учитывать эту особенность.

**О свойствах углов в МДШ.** Отметим следующие основные свойства.

*В евклидовой задаче Штейнера в МДШ углы между рёбрами, инцидентными ТШ, равны  $120^\circ$ ; в потоковой задаче Штейнера в МДШ углы между невырожденными дугами, инцидентными ТШ, отличны от  $120^\circ$ .*

Из формулы (2.1) следует известное свойство углов МДШ в евклидовой ЗШ, если рассматривать её как потоковую задачу с нулевыми мощностями источников и единичными весами. При  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$  имеем  $\cos \alpha_1 = -\frac{1}{2}$  и  $\angle \alpha_1 = 120^\circ$ . Аналогично,  $\angle \alpha_2 = \angle \alpha_3 = 120^\circ$ .

Из формулы (2.1) получаем достаточное условие невырождения дуг, инцидентных ТШ, в потоковой задаче:  $\omega_2^2 - \omega_3^2 > \omega_1^2$ . Это неравенство гарантирует, что  $\cos \alpha_1 < 0$  и  $\angle \alpha_1$  – тупой. В случае входящих дуг с близкими весами  $\angle \alpha_1 < 120^\circ$ , а при большой разнице весов  $\angle \alpha_1$  близок к  $90^\circ$ . В последнем случае  $\angle \alpha_2$  и  $\angle \alpha_3$  – тупые углы, причём хотя бы один из них больше  $120^\circ$ .

Заметим, что в полном ДШ степени углов между смежными дугами, входящими в ТШ, равны трём. На графической схеме вырожденного ДШ можно наблюдать «узлы», создающие иллюзию, что степени некоторых углов больше трёх.

На рис. 6 и 7 показаны схемы полных ДШ для  $n = 250$  терминальных вершин. В задаче без потоков (рис. 6) углы в ТШ  $120^\circ$ . В задаче с потоками (рис. 7) наблюдается больше вырожденных дуг в прикорневой области (корень дерева имеет метку 1). Углы в ТШ между входящими дугами с близкими весами меньше  $120^\circ$ ; при большой разнице весов близки к  $90^\circ$ .

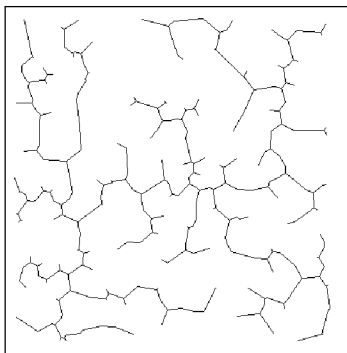


Рис. 6. Полное ДШ в задаче без потоков,  $n = 250$

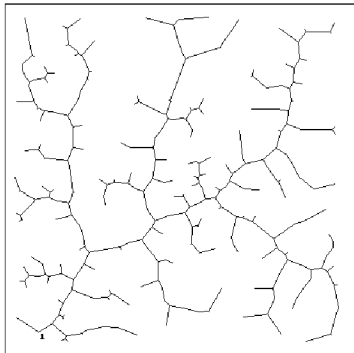


Рис. 7. Полное ДШ в задаче с потоками,  $n = 250$

### 2.3. Математическая модель для транспортной сети

Рассмотрим математическую модель потоковой задачи Штейнера для транспортной сети с одним стоком и конечным множеством источников продукта.

Пусть  $A = (V, D_\tau, l)$  – дерево с топологией  $\tau \in T$ , где  $V$  и  $D_\tau = \{(i, j) \mid i, j \in V\}$  – множества вершин и дуг; множество топологий  $T$  задается отображением инцидентности  $I: V \times V \rightarrow D$ . Пронумеруем вершины  $A$  и представим их в виде  $V = V_0 \cup V_S$ , где  $V_0 = \{i = 1 \div n, i = 1 - \text{корень}\}$  – терминальные вершины;  $V_S = \{i = (n + 1) \div (2n - 2)\}$  – ТШ;  $|V| = 2n - 2$ . Рассмотрим множество  $X = X_0 \cup X_S$ , где  $X_0 = \{(x_i, y_i) \mid x_i, y_i \in R^+, i = 1 \div n\}$  и  $X_S = \{(x_i, y_i) \mid x_i, y_i \in R^+, i = (n + 1) \div (2n - 2)\}$  – координаты терминальных вершин и ТШ. Сопоставим дугам  $(i, j) \in D_\tau$  их длины  $l_{(i, j)} = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{1/2}$  и определим на дугах функцию  $f(q_{(i, j)})$  от потоков  $q_{(i, j)} \geq 0$ . Источники продукта с мощностями  $M_0 = \{m_i \in R^+ \mid i = 2 \div n\}$  на дугах, исходящих из терминальных вершин, порождают потоки  $q_{(i, j)} = m_i$ . Потоки  $q_{(i, j)}$  на дугах, исходящих из ТШ, равны сумме потоков на дугах, входящих в них. Определим на дугах вогнутую весовую функцию  $w$  и вычислим веса дуг:  $w_{(i, j)} = k_{(i, j)} + c_{(i, j)} q_{(i, j)}$ , где  $k_{(i, j)} > 0$  и  $c_{(i, j)} > 0$  – удельные капитальные и транспортные затраты. При условии полного перетока продукта из источников в сток и баланса потоков в ТШ (правило Кирхгофа) требуется найти  $(\tau, X_S)$  – такие топологию и координаты ТШ, при которых сумма  $S(A)$  стоимостей всех взвешенных дуг  $w_{(i, j)} l_{(i, j)}$  дерева  $A$  минимальна.

Математическая модель задачи имеет вид:

$$S(A) = \sum_{\tau \in T, (i, j) \in D_\tau} (k_{(i, j)} + c_{(i, j)} \cdot q_{(i, j)}) \cdot l_{(i, j)} \rightarrow \min_{(\tau, X_S) \in TxR^2}.$$

Весовая функция интерполируется кусочно-линейной функцией  $k + c q$ , где  $k > 0$  и  $c > 0$  – ступенчатые функции от величины потока  $q$  на дуге, зависящие от технологических категорий коммуникаций. Из-за их специфики весовая функция может иметь разрывы первого рода в тех точках, где при суммировании входящих потоков необходима смена категорий.

Чтобы найти МДШ в потоковой ЗШ в дискретно-непрерывной постановке, необходимо решить две задачи: найти оптимальную топологию полного дерева; найти ДШ для дерева с этой топологией. Первая задача существенно сложнее второй из-за топологических свойств ДШ.

Точные алгоритмы для нахождения МДШ обычно основаны на перечислении полных топологий ДШ. В своё время автор разработал алгоритм полного и избыточного перебора полных топологий [20]. Он находит решения задач с потоками и без потоков для  $n \leq 12$ . (При  $n = 12$  число топологий уже равно 634729075.) Переборные алгоритмы неэффективны даже при малой размерности задачи, что предопределило переход к приближенным методам её решения.

Один из подходов для нахождения приближённого решения задачи – поиск МДШ среди ЛМДШ на подмножествах полных ДШ, формируемых с учётом свойств последних. Эта идея реализована эволюционными методами. Основанные на биологических понятиях и аналогиях [21–24], генетические и эволюционные алгоритмы (ГА и ЭА) позволяют находить хорошие решения задач, хотя и не гарантируют нахождения глобального оптимума.

ГА и ЭА для задач дискретной оптимизации известны с середины прошлого века [24]. Вещественные ГА (ВГА) для задач непрерывной оптимизации появились лишь в конце прошлого века: математическое сообщество не сразу приняло идею вещественного кодирования [25, 26]. Когда автор занялся решением потоковой ЗШ, к задачам дискретно-непрерывной оптимизации эти методы не применялись. В результате исследований и экспериментов была разработана эволюционная модель и композитный эволюционный алгоритм для потоковой задачи.

## ГЛАВА II

### ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПОТОКОВОЙ ЗАДАЧЕ ШТЕЙНЕРА

Рассмотрим особенности эволюционного подхода к потоковой задаче Штейнера [27–31]. В разделе 1 этой главы представлена эволюционная модель, основой которой являются эволюция популяции особей и онтогенез (индивидуальное развитие) отдельной особи [27]. В разделе 2 приведён композитный алгоритм, использующий эту модель [27, 29]. В разделе 3 обсуждается представление полных топологий и их формирование с помощью оригинальных генетических операторов [28]. Раздел 4 представляет гипотезу о «большой долине», которая описывает множества ДШ, перспективные для поиска МДШ [30]; раздел 5 содержит эволюционную модель для поиска ДШ и вещественный ЭА для решения этой задачи [31].

#### 1. Эволюционная модель

##### 1.1. Описание эволюционной модели

При описании эволюционной модели далее используются обозначения математической модели потоковой задачи и некоторые биологические аналогии. Вид трактуется как совокупность особей, имеющих сходные свойства и способных к скрещиванию. Особи одного вида образуют популяцию на некотором ареале. Особь описывает пара  $(\tau, X_S)$ , где топология  $\tau$  интерпретируется как хромосома (генотип); координаты точек Штейнера  $X_S$  – как фенотипические признаки особи (фенотип). Ареал  $(V_0, X_0, M_0, l, f(q))$  представляют входные данные математической модели:  $V_0, X_0$  – множества терминальных вершин и их координат;  $M_0$  – множество мощностей источников в терминальных вершинах, кроме корня дерева;  $l, f(q)$  – длины дуг и функция от потоков на дугах. Особь на ареале  $(V_0, X_0, M_0, V_s, X_S, \tau)$  – конкретное дерево с заданной топологией. Качественные признаки (потоки, значения

весовой функции и длины дуг) характеризуют фенотип особи, который оценивается фитнес-функцией (целевой функции) задачи.

Эволюционная модель – это объект вида:  $EM = \langle Str, Par, fit \rangle$ .

Структурные компоненты:

$Str = (ar, rp, P, G, rmt, smt, cr, mat, pl, es)$ ,

где  $ar$  – ареал;  $rp$  – случайный родитель вида;  $P$  – популяция особей порожденного вида;  $G$  – элитная группа;  $rmt$  – оператор случайных мутаций;  $smt$  – оператор селективных мутаций;  $cr$  – оператор кроссинговера;  $mat$  – оператор развития;  $pl$  – оператор отбора в популяцию;  $es$  – оператор отбора в элитную группу.

Параметры модели:

$Par = (r, g, Z, H, kr, ks_1, ks_2, kc, km_1, km_2)$ ,

где  $r$  и  $g$  – размеры популяции и элитной группы;  $Z$  и  $H$  – параметры, управляющие видообразованием и эволюцией популяции;  $kr$  – управляющий параметр (норма) оператора случайных мутаций;  $ks_1$  и  $ks_2$  – нормы оператора селективных мутаций для глобального и локального действия;  $kc$  – норма оператора кроссинговера;  $km_1$  и  $km_2$  – нормы оператора развития для глобального и локального действия.

Фитнес-функция:  $fit$ .

Для преобразования хромосомы в модели используются оригинальные эвристические генетические операторы [28]. Для формирования нового поколения популяции и обновления элитной группы можно применять любые известные операторы отбора [24].

Процесс эволюции в модели рассматривается на двух взаимосвязанных уровнях с разными временными шкалами (рис. 8). На верхнем уровне имитируется филогенез, т. е. историческое развитие видов особей. В дискретные моменты времени происходит случайное видообразование без дивергенции видов, т. е. побочные линии их развития исключаются. Процесс начинается с особи предкового вида. В качестве нее можно задать любое дерево, но удобнее автоматически строить дерево-прародитель со специальной топологией, которое описано далее. Из особи предкового вида с помощью оператора  $rmt$  случайных мутаций генерируется первый случайный родитель  $rp$ , который дает начало популяции  $P$  этого вида. (Потом с помощью этого же оператора из первого родителя будет порожден основатель популяции следующего вида, и т. д.)

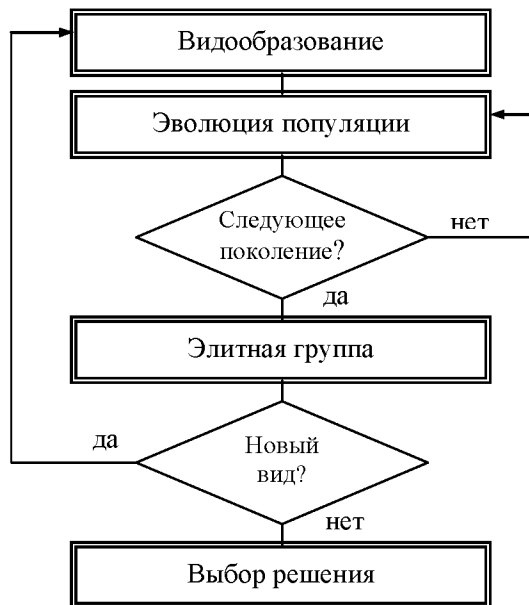


Рис. 8. Обобщённая схема эволюционной модели

На нижнем уровне модели имитируется эволюция популяции  $P$  порожденного вида на ареале  $ar$ . Оператор  $smt$  селективных мутаций и оператор  $cr$  кроссинговера применяются для генерации нового поколения. Селекция особей в него выполняется с помощью оператора  $pl$  отбора. Смена поколений происходит в дискретные моменты времени шкалы этого уровня.

На обоих уровнях действует оператор развития (maturation operator), с помощью которого имитируется онтогенез особи. Этот более низкий уровень моделирования не отражён на схеме ради ее прозрачности.

Элитная группа  $G$  обновляется за счет лучших особей, найденных в эволюционирующих популяциях разных видов. Для этого используется оператор  $es$  отбора в элитную группу. После останова видообразования из элитной группы выбирается особь с наилучшим значением фитнес-функции. В практических задачах предпочтителен экспертный выбор решения, позволяющий учитывать различные дополнительные факторы (экономические, экологические и пр.).

## 1.2. Параметры эволюционной модели

Вычислительные эксперименты позволили учесть степень взаимодействия и зависимость параметров от размерности задачи, а также уточнить их значения. Параметры можно условно разделить на три группы. Одни задают размеры структурных компонентов, другие управляют эволюционными процессами, третьи, названные нормами, – действиями генетических операторов.

В задачах размерности от 10 до 1000 размер  $g$  элитной группы достаточно задавать в пределах 5–10 особей. Размер  $r$  популяции может варьироваться в зависимости от конкретной реализации алгоритмов. Чтобы обеспечить качественное разнообразие решений, в ГА обычно формируется популяция большого размера, что приводит к нерациональному использованию памяти. Методы локального поиска позволяют эффективно работать с небольшой популяцией, и в частности, состоящей из одной особи. Такие алгоритмы иногда называют  $(1+1)$ -ГА.

Управление эволюционными процессами на двух уровнях модели организовано по-разному. На верхнем уровне параметр  $Z$  задает пороговое число актов видообразования в дискретные моменты  $z = 1 \div Z$ , где  $z$  отождествляется с номером порожденного вида. В любой момент на основе экспертной оценки промежуточных результатов можно продолжить или остановить процесс. На нижнем уровне параметр  $H$  интерпретируется как признак следующего критерия: если при генерации нового поколения с помощью любого оператора не найден ни один потомок, дающий улучшение фитнес-функции, эволюция популяции завершается. Зависимость числа поколений от размерности задачи прослеживается слабо, и критерий оказался эффективным для задач большой размерности.

Управление операторами осуществляется нормами, интерпретация которых зависит от способа действия конкретного оператора. Особенности реализации операторов рассмотрены отдельно [28], здесь даётся их краткая геометрическая характеристика и способ применения.

Оператор *rmf* случайных мутаций используется для моделирования видообразования. По всему дереву выполняется совокупность случайных единичных мутаций. Геометрический смысл действия каждой из них состоит в том, что пара выбранных случайным образом



концевых дуг дерева обменивается своими конечными вершинами. Норма  $kr$  оператора определяет число таких пар. Выбрано значение  $kr \approx n/4$ . Такая зависимость гарантирует глобальную перестройку топологии и качественное разнообразие решений и в среднем обеспечивает выход из областей притяжения локальных минимумов.

Оператор  $smt$  селективных мутаций выполняет ряд единичных мутаций, геометрический смысл действия каждой из которых – такая переброска дуги дерева, когда ее конечная вершина перемещается на середину другой дуги. Оператор может применяться как для грубой (глобальной), так и для мягкой (локальной) перестройки топологии дерева. Для обеспечения разнообразия начальной популяции вида нужна глобальная перестройка. Выполняя ряд перебросок, оператор случайным образом на всем дереве выбирает перемещаемую и принимающую дуги. Норма оператора определяет число таких перебросок. Выбрано значение  $ks_1 \approx n/8$ . В этом случае оператор  $smt$  действует аналогично оператору  $rmt$  случайных мутаций, но более мягко, сохраняя относительное сходство топологий. Для моделирования мутаций в эволюции популяции используется локальная перестройка топологии. Оператор  $smt$  выполняет ряд пробных единичных мутаций – перебросок одной дуги дерева на дуги из близкой окрестности. Норма  $ks_2$  оператора задает пороговое число таких мутаций, т. е. размер списка дуг, на которые делается переброска. Принимается первая проба, улучшающая фитнес-функцию. Для разных размерностей задачи приемлемы в среднем значения  $ks_2$  в пределах от 8 до 12.

Для моделирования скрещивания особей применяется оператор  $cr$  кроссинговера. Его своеобразие в том, что при рекомбинации он замещает фрагмент хромосомы реальной родительской особи на фрагмент хромосомы «виртуальной» особи. Это некий аналог генной инженерии: мы «не знаем» второго родителя, используя его хромосому «из пробирки». Геометрический смысл действия оператора – замена топологии выделенного поддерева. Замещаемый и замещающий фрагменты хромосомы соответствуют поддеревам с полными топологиями. Норма  $kc$  оператора определяет размерность поддерева. Поддеревья с 4 терминальными вершинами исключены из рассмотрения: замена топологии в них соответствует переброске дуги на поддереве, что моделируется оператором селективных мутаций. Значения более 9 нецелесообразны. Рекомендуемые размерности – 5,

6 и 7 терминальных вершин. Для 5 и 6 терминальных вершин приемлем полный перебор топологий поддерева, а для 7 и 8 – частичный перебор со случайным шагом, обеспечивающим заданный процент формируемых топологий. Для кроссинговера выбраны поддеревья размерности 5.

Вместе с рассмотренными операторами используется оператор развития *mat*. Его действие состоит в оптимизации координат ТШ с заданной точностью и получении ДШ. После генерации гибридной особи оператор применяется локально – к выделенному поддереву, норма  $km_2$  задает число итераций цикла оптимизации. Рекомендуемые значения от 50 до 100 в зависимости от размерности поддерева. После генерации случайного родителя или мутанта оптимизируются координаты ТШ всего дерева. В этом случае норма  $km_1 = 2km_2$ . Для обеспечения достаточной глубины оптимизации, цикл выполняется «по счёту три», т. е. прекращается тогда, когда три раза подряд нет улучшений фитнес-функции.

## **2. Композитный эволюционный алгоритм**

На основе эволюционной модели, рассмотренной выше, разработан композитный эволюционный алгоритм для потоковой задачи Штейнера [27].

### **2.1. Схема композитного эволюционного алгоритма**

Описание схемы алгоритма включает основные шаги поиска лучшей топологии, но не отражает двух моментов. Во-первых, после каждой перестройки топологии выполняется оптимизация координат ТШ. (Она рассмотрена в разделе 5.) Процесс оптимизации координат реализован с помощью методов случайного поиска экстремума многопараметрической функции [32]. Для быстрого выхода в область притяжения локального экстремума можно применять метод направляющего конуса с самообучением [33], а для дальнейшего приближения к нему – простейший метод покоординатного спуска. Во-вторых, в результате некоторых перестроек топологии неизбежно изменение нумерации ТШ. Поэтому в элитную группу могут попадать изоморфные деревья, топологии которых совпадают с точностью до нумерации. В алгоритм включена процедура выявления таких деревьев.

После автоматического формирования первой особи (прародителя) начинается цикл случайного видообразования, число актов которого задается параметром  $Z$ . В этот цикл вложен цикл эволюции популяции особей порожденного вида, которым управляет признак  $H$ .

Шаг 0. Генерация прародителя.

Шаг 1. Цикл видообразования:  $z = 1 \div Z$

Генерация случайного родителя  $rp$  вида  $z$ . Формирование  $r$  особей начального поколения популяции, номер поколения  $h = 0$ .

Шаг 2. Эволюция популяции  $P$  особей вида  $z$

2.1. Задание признака  $H = 0$  и номера нового поколения  $h = h + 1$

Цикл формирования поколения  $h$  мутантов:  $t = 1 \div r$

Цикл генерации потомков  $t$ -особи:  $v = 2 \div (2n - 2)$ . В окрестности  $O(v)$  ищется лучший потомок. В случае успеха  $H = 1$ .

2.2. Задание номера нового поколения  $h = h + 1$

Цикл формирования поколения  $h$  гибридных особей:  $t = 1 \div r$

Цикл генерации потомков  $t$ -особи:  $v = (n + 1) \div (2n - 2)$ . В окрестности  $O(v)$  ищется лучший потомок. В случае успеха  $H = 1$ .

2.3. Если  $H = 1$ , то переход к шагу 2.1, иначе – к шагу 3.

Шаг 3. Элитная группа  $G$ .

Если  $G = \emptyset$ , то отбор  $g$  гибридных особей из поколения  $h$  в элитную группу, иначе замена худшей особи группы.

Шаг 4. Если  $z < Z$ , то переход к шагу 1, иначе – к шагу 5.

Шаг 5. Выбор решения.

Приведённая схема описывает процесс эволюции популяции. На шаге 2 из текущего поколения с помощью оператора селективных мутаций формируется поколение мутантов, затем из него с помощью кроссинговера – поколение гибридных особей. Схема с чередованием поколений – аналог двух стадий эволюции популяции. На первой стадии при адаптации популяции к ареалу преимущество имеют мутанты, на второй, после адаптации, – гибридные особи [22].

При формировании пар поколений популяции применяется локальный поиск с итеративным улучшением. Просматривается порядка  $n$  потомков. В цикле  $v = 2 \div (2n - 2)$  динамически строится система окрестностей  $O(v)$ . Здесь  $v$  – номер дуги (по номеру ее начальной вершины), а элементы окрестности – ближайшие к ней дуги, на которые оператор селективных мутаций выполняет проб-

ные переброски дуги  $v$ .  $|O(v)| = ks_2$ . Первое найденное улучшение запоминается, устанавливается  $H = 1$ , и следующая окрестность формируется с учетом найденного улучшения. После завершения цикла лучший мутант вытесняет предка в новом поколении.

Действие кроссинговера связано с циклом  $v = (n + 1) \div (2n - 2)$ , где  $v$  – номер ТШ. Строится система окрестностей  $O(v)$ , элементы которой – автоматически формируемые поддеревья заданной размерности с корнем в вершине  $v$ . Число элементов  $|O(v)|$  окрестности равно числу полных топологий таких поддеревьев. Алгоритм исчерпывающего и неизбыточного перебора полных топологий [20] генерирует их все или заданный процент (со случайным шагом). Лучшее поддерево вписывается в дерево, которое становится текущим, устанавливается  $H = 1$ . После завершения цикла лучшая гибридная особь заменяет предка в новом поколении.

Действия операторов имитируют эволюционный процесс, в котором, несмотря на случайность отдельных перестроек, эволюция популяции приобретает некую направленность, возникающую как результат прошлой истории.

## 2.2. Вычислительные эксперименты

Тестирование композитного ЭА проводилось на компьютерах с процессорами Intel Celeron 800Hz, 256MB RAM, и Intel Neon 2.8GHz, 2GB RAM. При этом использовалась библиотека OR-Library [34], содержащая тесты для евклидовой ЗШ – частного случая потоковой ЗШ с нулевыми значениями мощностей источников. OR-Library содержит серии по 15 тестов для задач каждой размерности  $n = 10, 20, \dots, 100$  и их оптимальные решения или рекорды. Она включает отдельные задачи размерности 250, 500, 1000 без рекордов. Чтобы получить тесты для потоковой ЗШ, в сериях тестов из OR-Library были заданы мощности источников и весовая функция. Использовались также задачи из практики проектирования лесовозных сетей.

**Сравнение алгоритмов.** Эксперименты позволили уточнить схему алгоритма, оптимизировать параметры алгоритма и операторов, а также выбрать два перспективных композитных ЭА. В одном из них для поиска лучшей топологии использовался алгоритм с направленным поиском (АНП); в другом – алгоритм с генетической

моделью эволюции (АГМ). Оба алгоритма реализованы для популяции типа  $(1 + 1)$ . Табл. 2 содержит результаты тестирования этих алгоритмов на сериях задач без потоков и с потоками. Первый столбец  $n$  указывает размерности задач.

Таблица 2

Сравнение алгоритмов с АНП и АГМ

$n$	Беспоточковая ЗПП				Потоковая ЗПП	
	АНП		АГМ		АНП	АГМ
	$Z_p$	$Z^*$	$Z_p$	$Z^*$	$Z_r$	$Z_r$
10	1	1	2	4	1	1
20	1	1	1	7	2	23
30	1	3	1	14	2	14
40	1	4	41	65	1	19
50	23	35	21	91	5	41
60	1	2	36	73	17	66
70	2	3	107	148	9	32
80	64	147	231	—	10	73
90	57	138	259	—	9	123
100	22	211	290	—	24	218
250					69	—
500					47	—
1000					20	—

В задачах без потоков левый столбец  $Z_p$  обозначает число актов видообразования до нахождения рекорда с погрешностью до 1 % от оптимума;  $Z^*$  – число актов до нахождения оптимума. Прочерк поставлен там, где решение не найдено за 300 итераций. Задачи для  $n > 100$  не решались, так как в OR-Library нет рекордов для сравнения. В задачах без потоков АНП оказался эффективнее АГМ: во всех сериях лишь в 0.5 % случаев АНП не нашел решений задач с заданной погрешностью за указанное число актов видообразования.

В задачах с потоками правый столбец  $Z_r$  обозначает число актов видообразования до нахождения рекорда, прочерк – процесс остановлен по времени. В задачах размерности от 10 до 250 за рекорд принималось лучшее значение целевой функции, найденное за 300 актов. Оптимальность рекордов подтверждена для серии задач  $n = 10$ , точные решения которых найдены алгоритмом перебора полных топологий. Как видим, АНП явно превосходит АГМ: для нахождения

рекордов требуется значительно меньше актов видообразования и диапазон их значений уже. АНП лучше учитывает специфику потоковой задачи: в хороших решениях отмечается устойчивость топологии дерева по мере приближения к корню, где дуги имеют больший вес. АНП и генетические операторы быстро улавливают эту тенденцию в актах видообразования, соответствующих разным областям притяжения локальных минимумов.

**Пары поколений мутантов и гибридных особей.** Для АНП определялось среднее время генерации пар поколений мутантов и гибридных особей (табл. 3). Исследования показали, что число поколений популяции слабо зависит от размерности задачи [27]. Для задач с размерностью  $10 \div 1000$  среднее число пар поколений изменялось в пределах  $2 \div 7$ , максимальное число было равно 12 с частотой появления 0.001 %. Так как время генерации случайного родителя мало, пренебрегая им, можно оценить среднее время одного акта видообразования.

Таблица 3

Среднее время генерации пар поколений популяции (мин)

$n$	10	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	750	1000
Celeron	0.1	0.5	2.4	5.6	11.0	15.9	24.9	30.6	40.4	52.7	69.2	176.0	320.0
Neon	0.03	0.01	0.5	1.4	2.5	4.8	6.0	8.3	12.0	15.0	19.0	43.0	78.7

**Число итераций поиска лучшего потомка.** Композитный ЭА реализован как вложенный цикл. Во внешнем цикле генерируется начальное дерево, из которого порождается новая популяция, во внутреннем цикле ищется лучший потомок популяции. Локальный поиск лучшего потомка быстро сходится, что подтверждают доверительные интервалы для оценки математического ожидания числа итераций (табл. 4). Они рассчитаны по выборкам потоковых задач размерностей  $10 \div 1000$  [29]. Значения  $b_1$  и  $b_2$  – начало и конец доверительных интервалов для задачи каждой размерности. Худшие значения не превосходят  $2b_1$ . Коэффициент доверия 0.95.

Таблица 4

Доверительные интервалы

$n$	10	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	750	1000
$b_1$	2.37	3.87	4.56	4.62	4.63	4.98	5.21	5.19	6.70	5.77	5.93	6.27	7.40
$b_2$	2.43	3.93	4.64	4.78	4.97	5.22	5.39	5.41	7.10	6.23	6.27	7.13	8.74

**Иллюстрация работы алгоритма.** Для демонстрации отдельных моментов работы АНП взят фрагмент реальной транспортной сети. На рис. 9 показано полное начальное дерево с корнем в вершине 1 ( $n = 18, s = 16$ ). Номером дуги считается номер ее начальной вершины. На рис. 10 и 11 поясняется действие оператора селективных мутаций и оператора развития: выполняется единичная переброска дуги 25 на дугу 4 и последующая оптимизация координат ТШ. На рис. 11, кроме того, на ДШ выделено поддерево размерности 5 ( $k_c = 5$ ). Помимо конечных вершин 30, 9, 10, 11, 12, в него входят три ТШ. На нем выполняются операторы кроссинговера и развития, а результат дан на рис 12. На рис. 13 показано ДШ, попавшее в элитную группу после третьего акта видообразования и оказавшееся лучшим решением. По сравнению с начальным деревом, значение целевой функции уменьшилось примерно на 18 %, а длина дерева – на 30 %.

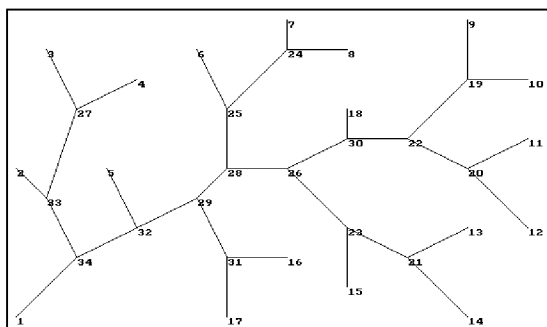


Рис. 9. Начальное дерево с полной топологией

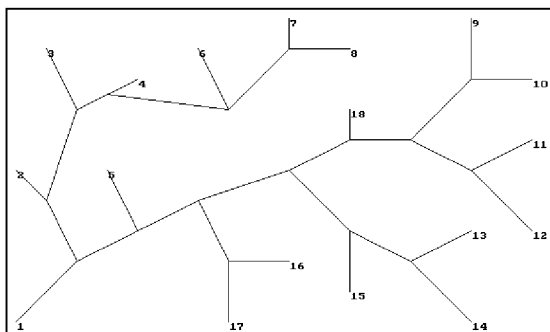


Рис. 10. Единичная переброска дуги

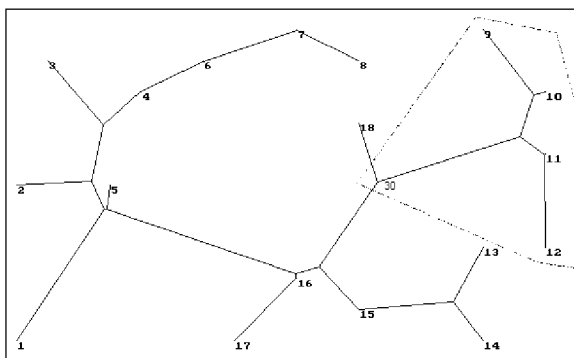


Рис. 11. Результат оптимизации координат ТШ

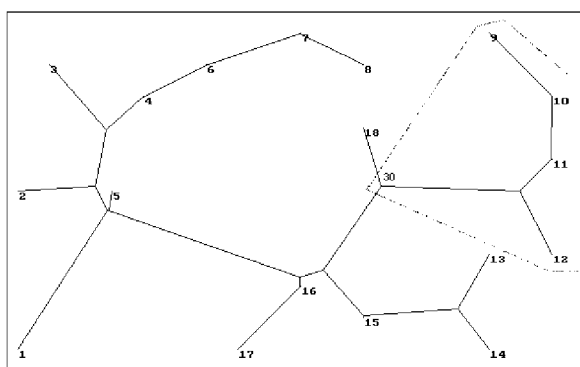


Рис. 12. Дерево Штейнера после оператора кроссингвера

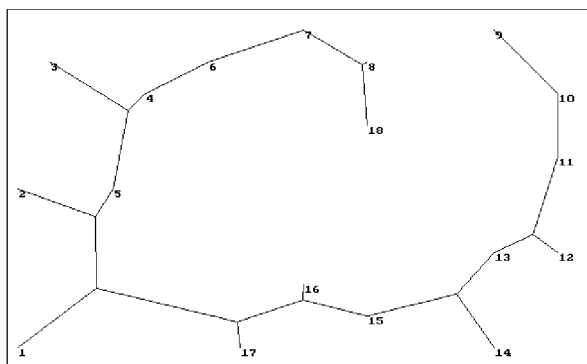


Рис. 13. Лучшее решение задачи



Эксперименты подтвердили эффективность композитного алгоритма, в котором для поиска лучшей топологии используется алгоритм с направленным поиском. Основой для его разработки послужила гипотеза о «большой долине» для потоковой ЗШ (раздел 4), при формализации которой важную роль играют оригинальные генетические операторы.

### 3. Генетические операторы

В этом разделе последовательно рассмотрены: представление и принцип кодирования / декодирования полной топологии дерева; различные эвристики и основанные на них оригинальные генетические операторы для преобразования топологий [28].

#### 3.1. Кодирование полных топологий

**Представление топологии.** Решая потоковую ЗШ, мы приняли основанное на позиционном способе компактное представление топологии дерева в виде строки. Оно давно известно и неоднократно «открывалось» разными исследователями. Иногда такое представление связывают с методом Прюфера [10]. Условимся нумеровать вершины дерева натуральными числами. Пусть терминальные вершины имеют номера от 1 до  $n$ , и номер корня всегда 1, а ТШ – номера от  $n + 1$  до  $N$ . Топология дерева представляется в виде следующей строки:

$$T = (t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_j, \dots, t_N)$$

Здесь индексы элементов строки соответствуют номерам начальных вершин дуг дерева, а значения элементов есть номера конечных вершин этих дуг. Смысл позиционного представления такой: если  $i$ -й элемент строки  $T$  имеет значение  $t_i = m$ , то в дереве есть дуга  $(i, m)$ , т. е. дуга с начальной вершиной  $i$  и конечной вершиной  $m$ . Такое представление топологии однозначно определяет дерево, и разным деревьям соответствуют разные представления.

Длина строки топологии равна числу вершин моделируемого дерева  $N = n + s$ , где число ТШ  $0 \leq s \leq n - 2$ . Такой подход позволяет представить полную топологию в виде строки фиксированной длины  $N = 2n - 2$ :

$$T = (t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_j, \dots, t_{2n-4}, t_{2n-3}, t_{2n-2})$$

В полном дереве все внутренние вершины – точки Штейнера, а терминальные вершины всегда концевые. В ТШ входят две дуги, а выходит одна. Элементы строки, за исключением первого и последнего, есть номера ТШ, т. е.  $t_i$  принимают значения от  $n + 1$  до  $2n - 2$ . Каждый из номеров присутствует в строке дважды. Поясним смысл исключений. Корню дерева всегда присваивается номер 1, а так как из первой вершины нет исходящей дуги, вводится фиктивная вершина 0 и фиксируется значение:  $t_1 = 0$ , что соответствует фиктивной дуге  $(1, t_1) = (1, 0)$ . Далее, начальной вершине корневой дуги (последней в дереве) можно присвоить номер  $2n - 2$ , т. е. номер последней ТШ. Конечная вершина последней дуги – корень дерева 1, т. е.  $t_{2n-2} = 1$ . Так фиксируется дуга  $(2n - 2, t_{2n-2}) = (2n - 2, 1)$ .

Кроме указанных исключений, в представлении топологии можно закрепить ещё один элемент. Рассматриваются задачи для  $n \geq 4$ , поэтому одна из двух дуг, входящих в последнюю ТШ (ближайшую к корню), обязательно должна быть внутренней. Значит, её начальной вершине можно присвоить номер  $2n - 3$  предпоследней ТШ. Так как предпоследняя дуга входит в последнюю ТШ, то  $t_{2n-3} = 2n - 2$ , т. е. зафиксирована дуга  $(2n - 3, t_{2n-3}) = (2n - 3, 2n - 2)$ . Унифицированная строка, представляющая топологию, имеет вид:

$$T = (0, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_j, \dots, t_{2n-4}, 2n - 2, 1)$$

В качестве примера рассмотрим дерево с топологией  $T'_0$ , показанное на рис. 14.

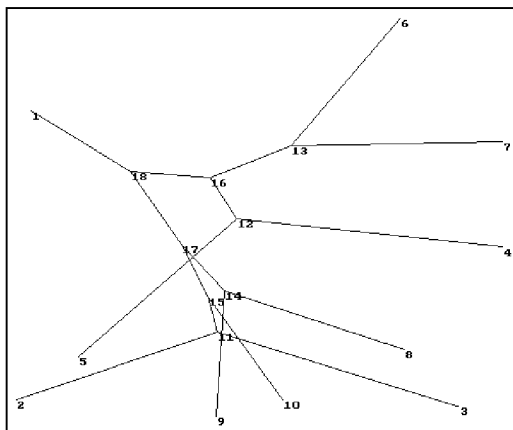


Рис. 14. Дерево с топологией  $T'_0$

Терминальные вершины дерева пронумерованы натуральными числами от 1 (корень) до 10, а ТШ – числами от 11 до 18. Топология  $T'_0$  дерева представлена строкой длины  $N = 2n - 2 = 18$ :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ T'_0 = (0, & 11, & 11, & 12, & 12, & 13, & 13, & 14, & 14, & 15, & 15, & 16, & 16, & 17, & 17, & 18, & 18, & 1) \end{array}$$

Верхняя строка, приведенная для наглядности, показывает индексы элементов  $T'_0$ . Эти индексы соответствуют номерам начальных вершин дуг дерева (они же считаются и номерами дуг). Элементы  $T'_0$  – номера конечных вершин этих дуг, – это номера ТШ, за исключением первого и последнего элементов. Три элемента (первый и два последних) фиксированы. Смысл позиционного представления  $T'_0$  следующий. Дуги 2 и 3 дерева идут в точку Штейнера 11, и этот номер стоит в позициях 2 и 3 в  $T'_0$ ; дуги 4 и 5 идут в ТШ 12, и ее номер занимает позиции 4 и 5; и т. д. Дуга 18 идет в корень 1, а фиктивная дуга 1 – в фиктивную вершину 0, поэтому значения 1 и 0 находятся в позициях 18 и 1 этой строки.

**Генерация полных топологий.** Опираясь на описанное представление, сформулируем принцип кодирования полных топологий и их генерации с помощью перестановок. Абстрагируясь от природы элементов, кодируем топологию  $T$  строкой, элементы  $p_i$  которой принадлежат множеству  $P = \{1, 2, \dots, 2n - 2\}$ . Следующая запись строки топологии под строкой перестановки устанавливает соответствие между их элементами, которое используется при кодировании / декодировании (переходе от топологии к перестановке и обратно):

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} (p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_i & \dots & p_{n-1} & p_n & p_{n+1} & \dots & p_j & \dots & p_{2n-4} & p_{2n-3} & p_{2n-2}) \\ T = (0, & t_2, & t_3, & \dots & t_i, & \dots & t_{n-1}, & t_n, & t_{n+1}, & \dots & t_j, & \dots & t_{2n-4}, & 2n - 2, & 1) \end{array}$$

Если в кодирующей строке элемент  $p_i = k$ , а в строке топологии  $t_i = m$ , то при декодировании топологии вместо  $k$  будет подставляться конкретное значение  $m$  номера ТШ. Сложность такого кодирования / декодирования:  $O(N)$ , где  $N = 2n - 2$ .

Ниже показано правило кодирования / декодирования, применяемое при генерации топологий. В качестве начальной перестановки взята единичная перестановка, которая оставляет все элементы на месте. В качестве начальной топологии выбрана топология  $T_0$ , в представлении которой номера ТШ расположены в неубывающем

порядке. Дерево с такой топологией будем называть прародителем. Получим следующее соответствие:

$$T_0 = \begin{matrix} (1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & k & k+1 & \dots & 2n-4 & 2n-3 & 2n-2) \\ (0, & n+1, & n+1, & n+2, & n+2, & \dots & m, & m, & \dots & 2n-2, & 2n-2, & 1) \end{matrix}$$

Из множества кодирующих перестановок выбираются только те, в которых остаются на своих местах три элемента:  $p_1 = 1$ ;  $p_{2n-3} = 2n - 3$ ;  $p_{2n-2} = 2n - 2$ . Таким образом, в перестановках участвуют только  $N - 3 = 2n - 5$  элементов. Число всех перестановок, удовлетворяющих этому условию, равно  $(2n - 5)!$  После декодирования многие перестановки дают представления топологий изоморфных деревьев. Во-первых, номер каждой ТШ соответствует двум разным элементам перестановки, поэтому появляются одинаковые представления топологий. Во-вторых, некоторые перестановки порождают разные представления, соответствующие изоморфным деревьям с точностью до перенумерации ТШ. Число таких «излишеств» с ростом  $n$  растет катастрофически быстро.

Число неповторяющихся топологий с различным числом  $s$  точек Штейнера значительно меньше  $(2n - 5)!$ . При работе только с полными топологиями число просматриваемых топологий сокращается на много порядков. Используя формулу числа всех топологий [9] или рекуррентный вывод, можно показать, что число полных топологий для задачи размерности  $n$  выражается формулой  $M = (2n - 5)!!$  Как видим, в ней фигурирует число  $2n - 5$ , т. е. количество элементов, фактически участвующих в перестановках. Это подтверждает оптимальность принятого принципа кодирования полных топологий.

Работа упомянутого алгоритма исчерпывающего и избыточного перебора полных топологий [20] основана на перестановках. Топология строится по ее номеру, начиная с  $T_0$ , что позволяет генерировать все топологии неизоморфных деревьев. Реализация алгоритма была ограничена возможностями конкретных ПК оперировать со сверхбольшими числами, и в полном объеме алгоритм применялся лишь к задачам небольшой размерности. Однако общая методология, заложенная в нем, позволила организовать эффективную работу на поддеревьях с полной топологией в задачах большой размерности.

### 3.2. Эвристики для генетических операторов

В эволюционной модели [27] строка  $T$ , представляющая топологию дерева, интерпретируется как хромосома, а ее элементы – как гены. Так, если ген  $t_i = m$ , то  $i$  отождествляется с локусом гена, а конкретное значение  $m$  номера ТШ с аллелем. Ген представляет в дереве дугу  $(i, m)$  с соответствующими значениями потока и весовой функции. При этом каждый ген является носителем признака не сам по себе, а только во взаимной связи с другими генами: значения потоков определяются всей совокупностью связанных генов в хромосоме. Таким образом, принцип кодирования топологии переносится на хромосому: если в кодирующей строке  $p_i = k$ , то при декодировании вместо  $k$  будет подставляться соответствующее значение  $t_i = m$ . Основываясь на этом принципе, можно моделировать операторы мутаций и кроссинговера с помощью перестановок, используя приведенные ниже эвристики. Порождаемые такими перестановками преобразования топологии ведут к перестройкам структуры дерева, т. е. имеют конкретную геометрическую интерпретацию.

Для иллюстрации эвристик используем приведенное на рис. 14 дерево, которое является прародителем для нашего примера. Взяв топологию  $T'_0$  в качестве начальной, установим следующее правило кодирования / декодирования:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} (1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18) \\ T'_0 = & (0, & 11, & 11, & 12, & 12, & 13, & 13, & 14, & 14, & 15, & 15, & 16, & 16, & 17, & 17, & 18, & 18, & 1) \end{array}$$

**Простейшая мутация.** Два гена хромосомы меняют свои локусы. Мутация моделируется перестановкой, в которой выполняется транспозиция  $(k\ l)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \dots p_a \dots k \dots l \dots p_n \dots p_b \dots 2n-3 & 2n-2 \\ 1 \dots p_a \dots l \dots k \dots p_n \dots p_b \dots 2n-3 & 2n-2 \end{pmatrix}$$

Геометрический смысл этой эвристики состоит в том, что две дуги в дереве меняются своими конечными вершинами.

Транспозиция элементов 3 и 4 из начальной перестановки порождает перестановку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

После декодирования получим топологию  $T'_1$  дерева, показанного на рис. 15.

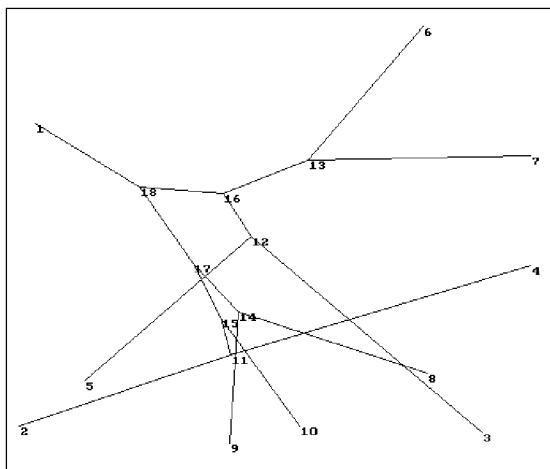


Рис. 15. Дерево после простейшей мутации

Элементы 3 и 4 в представлении топологии обменялись номерами ТШ, а дуги 3 и 4 – конечными вершинами.

$$T'_1 = (0, 11, 12, 11, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 1)$$

**Циклическая мутация.** Три гена хромосомы в цикле меняют свои локусы. Мутация моделируется с помощью перестановки, в которой элементы  $k$ ,  $l$  и  $r$  в цикле меняют свои места:

$$\begin{pmatrix} 1 \dots p_a \dots k \dots l \dots r \dots p_b \dots 2n-3 & 2n-2 \\ 1 \dots p_a \dots l \dots r \dots k \dots p_b \dots 2n-3 & 2n-2 \end{pmatrix}$$

Геометрический смысл этой эвристики – такая переброска одной дуги в дереве, при которой ее конечная вершина перемещается на середину другой дуги.

Так, циклический сдвиг элементов 5, 7 и 12 в начальной перестановке дает:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 12 & 6 & 5 & 8 & 9 & 10 & 11 & 7 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

После декодирования получаем топологию  $T'_2$  дерева, показанного на рис. 16.

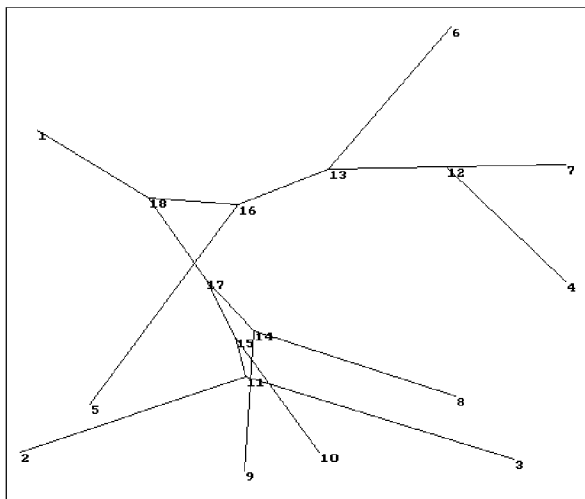


Рис. 16. Дерево после циклической мутации

$$T'_2 = (0, 11, 12, 11, 16, 13, 12, 14, 14, 15, 15, 13, 16, 17, 17, 18, 18, 1)$$

В топологии произошел циклический сдвиг номеров ТШ. Сравнение деревьев на рис. 9 и 11 показывает, что конечная вершина 12 дуги 4 переброшена на середину дуги 7, а дуга 5 идет в вершину 16.

Применение перестановок с большим числом элементов для мутаций в общем случае нерационально. Число вариантов слишком велико, результаты непредсказуемы, а процесс поиска практически неуправляем. Исключение составляет следующий частный случай.

**Рекомбинация.** Цепочка связанных между собой  $N'$  генов одной, реальной родительской хромосомы замещается цепочкой генов другой, «виртуальной» родительской хромосомы. Рекомбинация моделируется с помощью перестановки  $N'$  элементов, соответствующей цепочке этих генов. Геометрический смысл эвристики – выделенное на дереве поддереву с одной топологией заменяется поддеревом с другой топологией. Эти поддеревья имеют  $n'$  условно

терминальных вершин, а их топологии представлены строками длины  $N' = 2n' - 2$ .

Например, на дереве-прародителе (рис. 14) выделим полное поддерево с  $n' = 5$  условно терминальными вершинами: 18 (корень), 4, 5, 6, 7. В него попадают точки Штейнера 12, 13, 16. Этим восьми вершинам соответствуют восемь элементов единичной перестановки, кодирующей начальную топологию всего дерева: 4, 5, 6, 7, 12, 13, 16, 18. Рассматривая поддерево как самостоятельный объект, по описанному выше принципу генерируем новую топологию поддерева с помощью некоторой перестановки восьми элементов. Эту перестановку вписываем в перестановку, соответствующую всему дереву:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 12 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 13 & 4 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

После декодирования получаем топологию  $T'_3$  дерева на рис. 17:

$$T'_3 = (0, 11, 11, 13, 16, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 16, 12, 17, 17, 18, 18, 1)$$

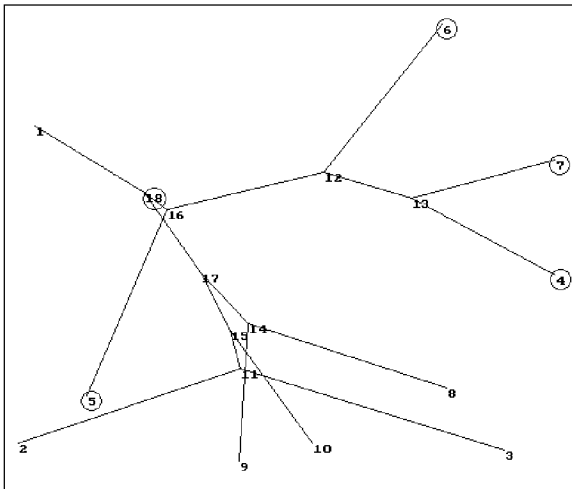


Рис. 17. Дерево после рекомбинации

Из сравнения соответствующих поддеревьев на деревьях, показанных на рис. 14 и 17, видно, что они имеют разные топологии.



### 3.3. Виды генетических операторов

С помощью рассмотренных эвристик разработаны три вида генетических операторов.

**Оператор случайных мутаций.** Он основан на простейшей мутации двух генов. Выполняется заданное нормой число случайных транспозиций, что соответствует случайной перестройке топологии.

Каждая транспозиция может дать три возможных исхода. Чтобы получать только допустимые мутации, выполняются транспозиции лишь для генов, локусы которых удовлетворяют условию:  $1 < i, j < n + 1$ . Такие транспозиции соответствуют обмену конечными вершинами у концевых дуг дерева. Очевидно, что в этом случае на дереве не могут возникать контуры. Следовательно, оператор всегда формирует кодирующую строку, соответствующую полной топологии. Есть вероятность получить клон – перестановку, которая после декодирования даёт топологию, совпадающую с порождающей с точностью до перенумерации ТШ. Такая ситуация легко обходится при задании нормы оператора – увеличением числа транспозиций. Вероятность клона при одной транспозиции не более  $1/(2(2n - 6))$ , в случае  $k$  транспозиций она не превышает  $1/(2(2n - 6))^k$ . Достоинства этого оператора – простота реализации и «безотходность».

Действие оператора случайных мутаций соответствует случайной выборке из полной совокупности всех возможных решений. Норма оператора задаётся таким образом, чтобы происходила резкая перестройка топологии дерева, что позволяет поиску выходить из зон локальных экстремумов.

При фиксированной норме реализация оператора включает: выбор элементов транспозиции с помощью генератора случайных чисел; кодирование / декодирование топологии; перерасчет потоков и весов дуг, задаваемых строками длины  $N = 2n - 2$ . Сложность этих операций –  $O(1)$ ,  $O(1)$  и  $O(N)$ . Следовательно, оператор имеет линейную оценку временной сложности.

**Оператор селективных мутаций.** Он основан на мутации трех генов, соответствующей переброске дуги. Выполняется ряд попыток перебросить одну дугу дерева на соседние дуги, длина списка которых задаётся нормой оператора. Принимаются попытки, улучшаю-

щие целевую функцию. Отсечь недопустимые мутации, дающие контуры в дереве, позволяет простой логический анализ.

Оператор применяется для мягкой перестройки топологии. Однако иногда случайно может появиться нетипичный мутант, который приводит к резкой перестройке структуры дерева, что дает дополнительный шанс выхода поиска из зоны локального экстремума.

При фиксированной норме реализация оператора включает: формирование списка дуг; кодирование / декодирование топологии; проверку допустимости топологии; перерасчет потоков и весов дуг. Оценки трех последних операций –  $O(1)$ ,  $O(N)$ ,  $O(N)$ . Временная сложность формирования списка дуг с сортировкой –  $O(N \lg N)$ , что и дает оценку сложности оператора.

**Оператор кроссинговера.** Он выполняет заданное нормой число рекомбинаций хромосомы. Это соответствует перебору топологий выделенного на дереве поддерева и поиску топологии, улучшающей целевую функцию. Для этого используется упомянутый ранее алгоритм перебора полных топологий, порождающий только допустимые топологии для неизоморфных деревьев.

Если в поддереве  $4 \leq n' \leq n$  терминальных вершин, то существует  $(2n' - 5)!!$  его полных топологий. Возможны разные варианты перебора. Можно реализовать фильтр, отсекающий варианты, «нелогичные» с точки зрения геометрии (например, пересечения дуг), но потребуются громоздкое программирование. Можно выполнять частичный или полный перебор. Эксперименты подтвердили, что рациональнее просто выделять поддерево с небольшим числом условно терминальных вершин от 5 до 7 и просматривать все его топологии. В этом случае норма оператора задает число  $n'$  терминальных вершин поддерева.

Оператор кроссинговера используется для мягкой перестройки топологии. В отличие от мутаций, поиск с помощью этого оператора не выходит из зоны локального экстремума, так как перестройка происходит лишь в пределах замещаемых поддеревьев. Кроссинговер лучше всего помогает распутать на дереве сложные узлы с пересечениями и вырожденными дугами.

При реализации кроссинговера выполняется перебор  $(2n' - 5)!!$  топологий выделенного поддерева, которое рассматривается как самостоятельный объект. Для каждой топологии находится ДШ, и лучшая топология поддерева вписывается в топологию дерева. Сложность

этих операций  $O(N')$ , где  $N = 2n' - 2$ . Сложность оператора кроссинговера –  $O(N'(2n' - 5)!!)$ . При рекомендуемой фиксированной норме получаем  $O(k)$ , где  $k$  изменяется в диапазоне от  $10^2$  до  $10^4$ . В общем времени поиска доля этих затрат сравнительно невелика.

В результате серий экспериментов были установлены зависимости норм рассмотренных операторов от размерности задачи и выбрана схема их применения в композитном ЭА. Она позволила формировать перспективные для поиска МДШ подмножества топологий, связанные с гипотезой о «большой долине» для потоковой задачи Штейнера.

#### 4. Гипотеза о «большой долине»

Потоковая задача Штейнера имеет множество локальных минимумов. Анализ их распределения связан с понятием ландшафта полезности [35]. Впервые такой анализ был проведен для симметричной задачи коммивояжера [36]. Он выявил сильную корреляцию между значениями целевой функции и расстояниями между локальными минимумами (fitness-distance correlation). Это позволило предположить, что ландшафт полезности образует выпуклую структуру с центральным глобальным минимумом, которую назвали «большой долиной» («big valley»). Позже она была выявлена у некоторых других задач.

Развитию гипотезы о «большой долине» способствовали дальнейшие исследования ландшафта полезности многопараметрических задач. В качестве прецедента сошлемся на задачу планирования работ. В [37] ее ландшафт представлен как UV-структура, состоящая из мелких широких долин u-valleys и глубокой изогнутой долины v-valley с глобальным минимумом. В [38] отмечено, что число долин зависит от соотношения между числом работ и машин; дано определение ландшафта «большой долины» и указаны необходимые условия её существования: 1) малые улучшающие переходы; 2) кластеризация оптимальных решений.

Исследование ландшафта полезности позволило выявить важную особенность потоковой задачи Штейнера – устойчивость её решений. На этой основе была выдвинута гипотеза о существовании «большой долины» в этой задаче [30].

#### 4.1. Устойчивость решений потоковой задачи Штейнера

Ранее было показано, что вырожденные дуги в дереве появляются при оптимизации координат ТШ на плоскости. Наиболее сильно этот эффект проявляется в прикорневой области дерева, так как из-за суммирования потоков в ТШ веса дуг растут с приближением к его корню. Вследствие этого неизоморфные ДШ с различными топологиями могут иметь одинаковые геометрические конфигурации в прикорневой области. Такая устойчивость – важная особенность решений потоковой задачи Штейнера. Число вариантов конфигураций невелико даже в задачах большой размерности. Так как прикорневая область вносит в величину целевой функции наибольший вклад, каждому варианту соответствует огромное количество деревьев с общими прикорневыми поддеревьями и близкими значениями целевой функции. (Топологии и координаты ТШ поддеревьев являются «backbone» для решений задачи.) Именно среди множества ДШ с отмеченными особенностями с наибольшей вероятностью можно найти глобально оптимальные и близкие к ним решения. Это приводит к следующей гипотезе.

*Ландшафт «большой долины» в потоковой задаче Штейнера – это объединение субструктур, образованных подмножествами ДШ, которые имеют общие прикорневые поддеревья и близкие значения целевой функции.*

На рис. 18 наложением сравниваются два ДШ для потоковой задачи размерности  $n = 80$ . Несовпадения конфигураций ДШ на периферии показаны штриховыми линиями. Относительная разность значений целевой функции составляет 0.08 %. Оба ДШ принадлежат одной субструктуре, сформированной композитным ЭА.

При поиске МДШ в потоковой задаче композитный ЭА выполняет следующие шаги:

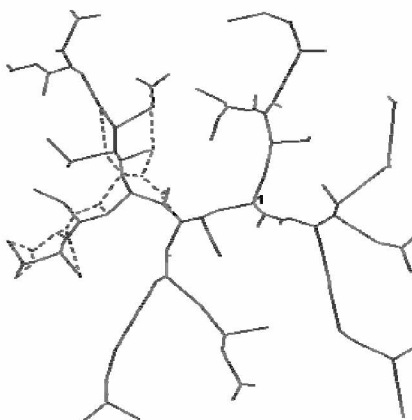


Рис. 18. Сравнение конфигураций ДШ

1) генерация ДШ со случайной топологией; 2) поиск лучшего дерева во множестве ДШ за счёт переброски дуг; 3) поиск лучшего дерева во множестве ДШ за счёт замены топологий в поддеревьях. Последний шаг имитирует действия кроссинговера [28], порождающего подмножество деревьев Штейнера, формирующих некоторую субструктуру из «большой долины».

## 4.2. Формализация ландшафта «большой долины»

Введём следующие обозначения:  $T$  – множество полных топологий деревьев на множестве  $n$  заданных точек плоскости,  $|T| = (2n - 5)!!$ ;  $U = \{A \mid \tau \in T\}$  и  $U_S = \{S(A) \mid A \in U\}$  – множества полных ДШ и соответствующих значений целевой функции.

Пусть  $A \in U$  и  $S(A) \in U_S$ . Обозначим  $J = \{1, 2n - 2, 2n - 3, \dots, n + 1\}$  – список вершин, содержащий корень и точки Штейнера дерева  $A$ ,  $|J| = n - 1$ ;  $A_j$  – поддерево  $A$  с корнем в  $j \in J$  размерности  $n' < n$  и топологией  $\tau_j \in T'$ , где  $T'$  – множество полных топологий  $A_j$ ,  $|T'| = (2n' - 5)!!$ .

Применим к  $A$  кроссинговер. Он реализован в виде следующей процедуры.

1. Выделяем в  $A$  поддерево  $A_j$  с корнем  $j \in J$  размерности  $n'$ , если возможно.

2. Перечисляя все топологии  $\tau_j \in T'$ , находим ДШ для  $A_j$  и ищем лучшее  $A'$ :  $S(A') < S(A)$ ; если  $A'$  существует, то  $\tau = \tau'$ ,  $A = A'$ ,  $S(A) = S(A')$ .

3. Если  $J \neq \emptyset$ , выделяем в  $A$  поддерево  $A_{j+1}$  и продолжаем процесс.

Чтобы пояснить смысл этой процедуры, введём следующие определения.

*Функция окрестности топологии* – отображение  $N: T \rightarrow 2^T$ , которое для  $\tau \in T$  дерева  $A$  задает множество топологий  $N(\tau)$  заменой топологий в поддереве  $A_j$ ,  $j \in J$ .

*Функция окрестности ДШ* – отображение  $D: U \rightarrow 2^U$ , которое для дерева Штейнера  $A$  с топологией  $\tau$  задает множество деревьев  $D(A)$  с топологиями  $\tau \in N(\tau)$ .

Локально минимальное дерево Штейнера (ЛМДШ) относительно  $D$  – дерево Штейнера  $A' \in D(A)$  с топологией  $\tau' \in N(\tau)$ , для которого  $S(A') \leq S(A) \quad \forall A \in D(A)$ .

Функция  $N$  задает множество топологий, близких по расстоянию Хэмминга: у них не совпадают только элементы топологии поддерева размерности  $n'$ . Так как при перераспределении потоков внутри поддерева относительное изменение целевой функции на всем дереве невелико, то функция  $D$  порождает ДШ с близкими значениями целевой функции. Благодаря свойствам  $N$  и  $D$  возможны локальные улучшающие переходы от одного ДШ к другому.

Для  $A \in U$  кроссинговер формирует  $U_J \subseteq U$  и  $T_J \subseteq T$  – подмножества ДШ и их топологий и  $U^* \subseteq U_J$  и  $T^* \subseteq T_J$  – подмножества ЛМДШ и их топологий. Число топологий  $|T^*| < (2n' - 5)!!(n - 3)$  мало по сравнению с  $|T| = (2n - 5)!!$ . Это справедливо для  $|U^*|$  и  $|U|$ .

Подмножество  $U^*$  содержит ЛМДШ, полученные в результате улучшающих замен топологий, которые начинаются с прикорневых поддеревьев. По крайней мере, элементы топологий последних содержатся в  $T^*$ . Так как веса дуг прикорневых поддеревьев вносят наибольший вклад в величину целевой функции, ЛМДШ в  $U^*$  имеют близкие значения целевой функции.

Субструктура «большой долины» – объект вида  $L = \langle U_J, D, S \rangle$ , где  $U_J$  – подмножество ДШ,  $D$  – функция окрестности ДШ;  $S$  – целевая функция; причём  $U_J \supseteq U^*$ , где  $U^*$  – подмножество ЛМДШ с общими прикорневыми поддеревьями и близкими значениями целевой функции.

Ландшафт «большой долины» – это объединение субструктур вида  $L = \langle U_J, D, S \rangle$ .

Псевдооптимальное решение потоковой задачи Штейнера – это ЛМДШ  $A^* \in U^*$  с топологией  $\tau^* \in T^*$ :  $S(A^*) \leq S(A) \quad \forall A \in U^*$ .

На каждой итерации композитный ЭА находит ЛМДШ для соответствующей субструктуры. Лучшие ЛМДШ сохраняются в элитной группе, при большом числе итераций некоторые из них могут появляться повторно. Тестирование ЭА [27] подтверждает, что элитная группа с большой вероятностью содержит МДШ и близкие к нему решения. Быстрое «скатывание» поиска к топологии МДШ объясняется существованием «большой долины».

### 4.3. Вычислительные эксперименты

Для экспериментов с помощью генератора случайных чисел были подготовлены серии по 150 задач с потоками и без потоков размерности  $n = 8, 9, 10, 11$ . Они решались алгоритмом исчерпывающего неизбыточного перебора полных топологий [20] на кластере КарНЦ РАН [39] и композитным ЭА на ПК Turion 64 X2 2000 МГц. Размерность  $n = 11$  оказалась критичной для переборного алгоритма: при выполнении на кластере требовалось 25–27 ч. При этом он формировал топологии с номерами от 1 до  $17!! = 34459425$  и находил ДШ. Тогда как ЭА за 30 секунд заполнял элитную группу из пяти ДШ, среди которых было, по крайней мере, одно МДШ. Анализ выявил общие тенденции при решении серий задач этих размерностей, поэтому для демонстрации выбраны задачи размерности  $n = 11$  – с наибольшим числом топологий.

**Эксперимент 1.** Для обеих серий задач полным перебором были найдены МДШ и порядковые номера их топологий. На рис. 19 и 20 приведены полигоны вместе с линиями тренда, которые показывают распределение относительных частот первых находений топо-

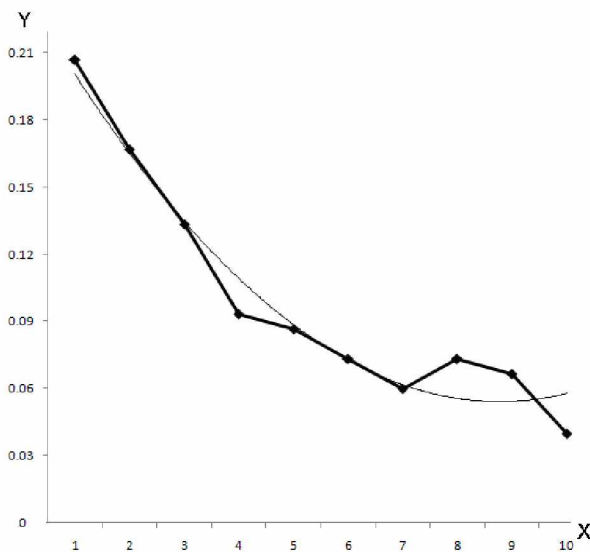


Рис. 19. Распределение топологий МДШ  
в задачах с потоками

логии МДШ. Для компактности представления множество номеров топологий разделено на интервалы. На оси абсцисс приведены порядковые номера интервалов, на оси ординат – относительные частоты. Рис. 19 показывает четко выраженную тенденцию: наибольшие относительные частоты характерны для начальных интервалов. Она объясняется двумя факторами.

Во-первых, в потоковых задачах Штейнера топологии «тяготеют» к области пространства поиска, где соответствующие ДШ имеют значения целевой функции, близкие к оптимальному. Во-вторых, при оптимизации координат ТШ из-за вырождения многих дуг для разных топологий получаются повторяющиеся конфигурации деревьев, значения целевой функции которых повторяют найденные ранее, и номера их топологий не включаются в статистику.

В задачах Штейнера без потоков тенденция другая (рис. 20): первый фактор не действует, а второй проявляется слабее из-за меньшего числа вырожденных дуг в дереве.

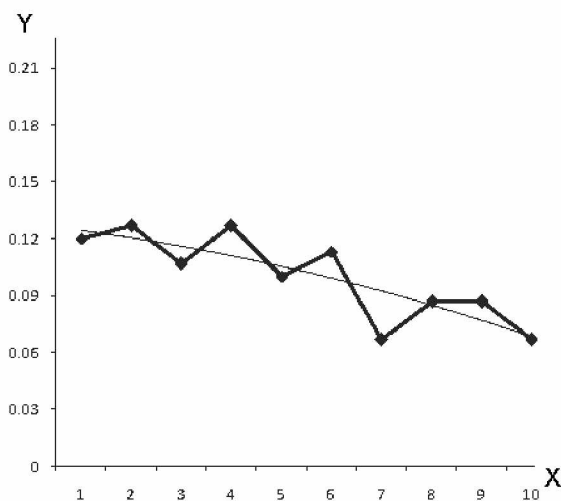


Рис. 20. Распределение топологий МДШ в задачах без потоков

**Эксперимент 2.** С погрешностью 0.001, избыточной для практических приложений, в сериях задач с потоками и без потоков композитный ЭА нашел те же топологии МДШ, что и переборный



алгоритм. Для каждой задачи подсчитывалось число итераций, необходимых для заполнения элитной группы (5 МДШ). На рис. 21 дана гистограмма для задач с потоками и без (темные и светлые полосы). Область из 100 итераций разделена на 20 интервалов. На оси абсцисс показаны номера интервалов, на оси ординат – распределение задач по интервалам. В первом интервале, где ЭА нашел пять МДШ за пять итераций, оказалось около 60 % задач с потоками и 47 % без потоков. С ростом размерности задачи различие заметно увеличивается.

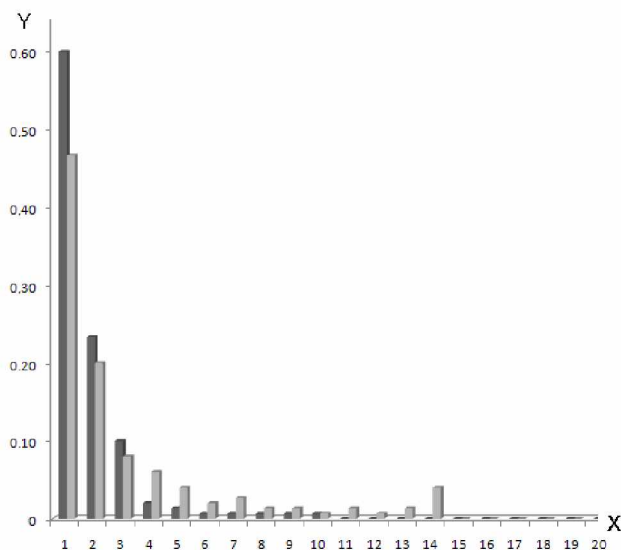


Рис. 21. Заполнение элитной группы в задачах с потоками и без потоков

**Эксперимент 3.** Композитный ЭА имеет высокий начальный порог, который устанавливается после первого акта видообразования. Так как конфигурация «тяжёлой» прикорневой области дерева выбирается первой, мелкие локальные минимумы, быстро отсекаются. В элитную группу попадает небольшое число вариантов лучших решений.

Рассмотрим фрагмент реальной сети с 18 источниками одинаковой мощности ( $n = 18$ ,  $s = 16$ ). После пяти итераций элитная группа уже содержит два лучших ЛМДШ (рис. 22 и 23). Значения их целевых

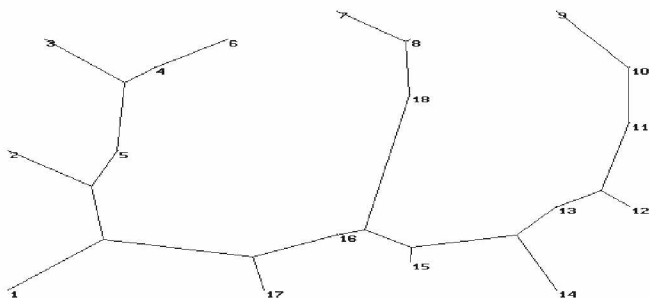


Рис. 22. ЛМДШ в задаче с потоками

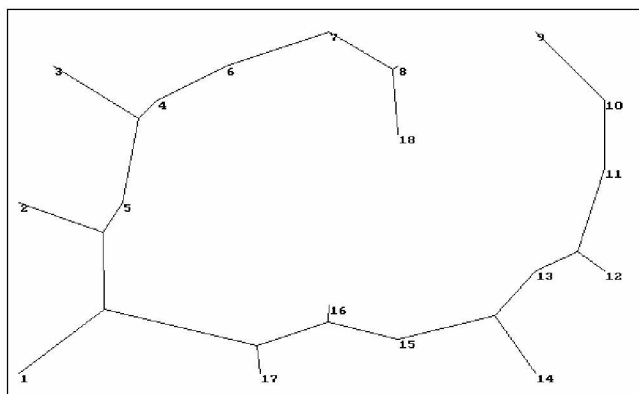


Рис. 23. МДШ в задаче с потоками

функций отличаются на 1.33 %. В результате поиска в группе остаётся одно ЛМДШ (рис. 23). С высокой вероятностью можно утверждать, что это МДШ для этой задачи.

## 5. Задача поиска деревьев Штейнера

Двухуровневый композитный ЭА для потоковой задачи Штейнера ищет МДШ среди ЛМДШ на подмножествах полных ДШ. При этом решаются два вида задач. На верхнем уровне выполняется поиск топологий дерева, на нижнем – поиск ДШ для деревьев с найденной топологией. С ростом числа оптимизируемых параметров возрастают общие затраты времени на нахождение МДШ: резко

увеличивается число порождаемых топологий и число решаемых задач поиска ДШ. Чтобы решение последних задач не стало «бутылочным горлышком» для композитного алгоритма, требовался эффективный алгоритм для поиска ДШ.

### 5.1. Выбор метода решения задачи

Для задачи поиска ДШ было разработано несколько алгоритмов, основанных на методах случайного поиска, известных своей эволюционной природой [32]. На первый взгляд перспективными выглядели методы многопараметрической оптимизации, в частности, алгоритм с направляющим конусом с самообучением [33]. Вектор памяти, введенный в алгоритм, рассматривается в  $(2n - 2)$ -мерном пространстве параметров. После удачного шага компоненты вектора рекуррентно пересчитываются. В задачах небольшой размерности метод был весьма эффективным, но с ростом числа параметров резко возрастают затраты времени на поиск ДШ. Из-за нелинейной сложности алгоритма пришлось отказаться от его применения в композитном ЭА.

По аналогичной причине бесперспективным был и градиентный алгоритм с парными пробами: в задачах большой размерности требовалось много времени на вычисление градиентов.

Подходящим для использования в композитном алгоритме оказался вещественный эволюционный алгоритм, имевший практически линейную вычислительную сложность [31].

### 5.2. Эволюционная модель задачи

Рассмотрим математическую и эволюционную модели задачи, используя обозначения, введенные для соответствующих моделей поточковой задачи в разделах 1.1 гл. I и 2.3 гл. II. Задача поиска ДШ для дерева  $A_\tau$  с заданной полной топологией  $\tau \in T$  состоит в том, чтобы среди множества деревьев с такой же топологией найти дерево, координаты  $X_S$  точек Штейнера которых оптимальны. Так как распределение потоков  $\{q_{(i,j)}\}$  на дугах  $(i,j) \in D_\tau$  фиксировано, имеем задачу непрерывной многопараметрической оптимизации.

Математическая модель задачи поиска ДШ имеет вид:

$$S(A_\tau) = \sum_{(i,j) \in D_\tau} (k_{(i,j)} + c_{(i,j)} \cdot q_{(i,j)}) \cdot l_{(i,j)} \rightarrow \min_{X_S \in R_\tau^2}$$

Эволюционная модель для этой задачи описывает индивидуальное развитие (онтогенез) отдельной особи. Компоненты и параметры модели являются частью рассмотренной ранее эволюционной модели для потоковой задачи Штейнера [27].

*Модель онтогенеза особи* – это объект вида:

$$REM = \langle ar, A_\tau, X_S, mat, km_1, km_2, S(A_\tau) \rangle,$$

здесь  $ar = (V_0, X_0, M_0, l, \{q_{(i,j)} \mid (i,j) \in D\})$  – ареал, где  $V_0, X_0$  – множества терминальных вершин и их координат;  $M_0$  – множество мощностей источников в терминальных вершинах, кроме корня дерева;  $l$  – функция длин дуг;  $\{q_{(i,j)} \mid (i,j) \in D\}$  – распределение потоков на дугах дерева. Дерево  $A_\tau = (V_0, X_0, M_0, V_s, \tau, X_{s0})$  с заданной топологией  $\tau \in T$  – особь с хромосомой  $\tau$  и начальным  $X_{s0}$  набором генов;  $X_S$  – искомый набор генов особи;  $mat$  – оператор развития;  $km_1$  и  $km_2$  – нормы оператора развития для глобального и локального действия;  $S(A_\tau)$  – значение фитнес-функции.

В модели онтогенеза хромосома  $\tau$  отождествляется с генотипом особи, а набор генов  $X_S$  – с её фенотипом. Отметим, что гены  $(x_i, y_i) \in X_S$  имеют сложную структуру. Такая трактовка генов впервые используется в модели, хотя в генетике она известна с 30-ых годов прошлого века.

Начальный фенотип  $X_{s0}$  особи изменяется вследствие случайных внешних воздействий. Их имитирует оператор  $mat$ , названный оператором развития (maturation operator) по ассоциации с моделью онтогенеза. Это групповой оператор: при однократном применении он выполняет заданное нормой  $k$  число операций с  $X_S$ . В зависимости от ситуации  $k = km_1$  или  $k = km_2$ .

### 5.3. Вещественный оператор развития

Оператор развития разработан на основе метода покоординатного спуска [32]. Этот метод применяют для поиска ЛМДШ в задачах Штейнера [40]. В современных метаэвристических алгоритмах он служит для «оживления» процесса поиска решения задачи. Использование этого метода для реализации оператора нетипично для ВГА. Обычно в них применяют аналоги дискретных генетических операторов, оперирующих с «простыми» генами [25, 26].

Для реализации оператора развития выбрана случайная модификация метода покоординатного спуска. Она не только позволяет работать со сложными генами – координатами ТШ, но и весьма эффективна при выполнении групповых операций с ними. Геометрический смысл действий этого оператора состоит в том, чтобы в окрестности каждой ТШ случайным образом найти её новое положение, улучшающее значение целевой функции задачи.

**Адаптация метода покоординатного спуска.** Рассмотрим случайную модификацию метода покоординатного спуска, адаптированного для потоковой задачи Штейнера.

Пусть  $A_\tau$  – дерево с заданной топологией  $\tau \in T$ ;  $X_S = \{(x_i, y_i) \mid x_i, y_i \in \mathbb{R}^+, i = (n + 1) \div (2n - 2)\}$  – текущие координаты ТШ. Случайная модификация метода сводит решение многопараметрической задачи к решению  $(n - 2)$  однопараметрических задач. С помощью случайных проб ищутся улучшения значений целевой функции по каждой паре  $(x_i, y_i) \in X_S$  при условии, что значения  $(x_j, y_j)$ ,  $j \neq i$ , остаются неизменными. Требуется найти такие координаты каждой ТШ, при которых сумма затрат на трех дугах, инцидентных этой ТШ, минимальна.

Адаптация метода включает организацию циклов покоординатного спуска и случайных проб с рекуррентными формулами для рабочего шага. Цикл покоординатного спуска использует очередь  $I$  перебора, состоящую из номеров ТШ. Установлено, что в данном случае оптимальным является перебор ТШ в направлении от корня дерева к его периферии. При этом быстро находится устойчивая конфигурация в прикорневой области дерева [30]. Дальнейшие улучшения значения целевой функции происходят в основном за счёт оптимизации координат ТШ в средней части дерева, что влияет на выбор оптимального числа случайных проб.

Для  $i$ -ой ТШ из очереди перебора  $I$  выполняется цикл из  $pr$  случайных проб. Значения  $pr$  оптимизированы: для поддереьев  $pr = 3$ , для деревьев  $pr = 5$ . Новые значения в каждой паре координат  $(x_i, y_i) \in X_S$  выбираются по первой пробе, давшей улучшение значения целевой функции. Нет смысла выполнять оставшиеся пробы: вследствие взаимодействия между ТШ при повторении цикла градиент в каждой ТШ может непредсказуемо меняться.

Рекуррентные формулы для  $(N + 1)$ -го рабочего шага метода при  $\forall i \in I$  имеют вид:

$$\begin{cases} x_i^{N+1} = x_i^N + (p_x - 0.5)R; & y_i^{N+1} = y_i^N + (p_y - 0.5)R, & \text{если } \Delta s_i^{N+1} > 0, \\ x_i^{N+1} = x_i^N; & y_i^{N+1} = y_i^N & - \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь  $(x_i^N, y_i^N)$  и  $(x_i^{N+1}, y_i^{N+1})$  – координаты  $i$ -ой ТШ до и после пробы;  $p_x, p_y$  – случайные числа, равномерно распределённые на  $(0,1)$ ;  $\Delta s_i^{N+1} = s_i^N - s_i^{N+1}$  – изменение целевой функции после пробы, где  $s_i^N, s_i^{N+1}$  – суммарные затраты на трёх дугах, инцидентных ТШ с координатами до и после пробы;  $R$  – радиус круга  $K(i, R)$  с центром в  $i$ -ой ТШ с координатами  $(x_i^N, y_i^N)$ .

На  $(N + 1)$ -м шаге проба для  $i$ -ой ТШ выполняется так, чтобы точка со случайными координатами  $(x_i^{N+1}, y_i^{N+1})$  попадала в круг  $K(i, R)$ . В результате статистических испытаний установлена зависимость значения радиуса  $R$  от густоты сети  $C$ . Если  $C$  определить как среднее расстояние от каждой терминальной вершины до ближайшей терминальной, то  $R = 0.31C$ .

Вычислительная сложность рассмотренного метода составляет  $O(n)$ : в случае конечных параметров она определяется числом пар координат ТШ. Оператор развития с конечной нормой наследует линейную сложность рассмотренного метода.

#### 5.4. Вещественный эволюционный алгоритм

Оператор развития используется для поиска ДШ деревьев и поддеревьев [31]. Решение задач ищется с точностью  $\varepsilon = 0.001$ . Порог  $\varepsilon$  рассчитан для практических задач большой размерности с погрешностью входной информации в 3 %. Он используется и в задачах со случайными данными. Решению задачи поиска ДШ предшествует построение начального дерева (поддерева) с заданной топологией, т. е. нахождение начальных координат ТШ.

**Эвристика для построения начального дерева.** В композитном ЭА начальное дерево наследуется от предыдущего этапа решения задачи. Начальные координаты ТШ для прародителя [28] и поддеревьев вычисляются с помощью следующей эвристики.

По заданной топологии формируется очередь перебора ТШ дерева. Построенная по признаку удалённости от корня, она может применяться в прямом или обратном порядке. В данном случае она используется по направлению от периферии к корню дерева. Сначала координатам каждой ТШ из очереди перебора последовательно присваиваются значения координат середины отрезка, связывающего эту ТШ со смежными начальными вершинами входящих дуг. Затем каждая ТШ сдвигается по исходящей дуге на две трети её длины. Эта эвристика дает хорошее начальное приближение: во всех четырехточечных фрагментах дерева (поддерева) уменьшаются длины самых «тяжелых» дуг, поэтому число итераций поиска решений значительно сокращается.

**Поиск ДШ для поддеревьев и деревьев.** Точки Штейнера в деревьях взаимосвязаны. В процессе оптимизации после изменения положения одной ТШ есть вероятность оптимизации положений других. Взаимодействие ТШ в поддеревьях ( $n < 10$ ) проявляется слабо. Поэтому для оптимизации их координат достаточно применить оператор развития с оптимизированной нормой  $km_2 = 50$ . Эта процедура сохраняет линейную сложность оператора развития.

Для нахождения ДШ деревьев разработан ВЭА с оператором развития, в котором используется оптимизированная норма  $km_1 = 100$ . Оператор выполняется поэтапно, причём этапы отделяются друг от друга частичными рестартами. В отличие от полных, они сохраняют преемственность решений, способствуя нахождению устойчивого  $X_S$ .

Фенотип  $X_S$  считаем устойчивым на отдельном этапе, если при этом относительное улучшение целевой функции не превышает заданный порог. Фенотип  $X_S$  считаем оптимальным, если он устойчив на нескольких последовательных этапах поиска. В ВЭА для деревьев принят критерий останова «по счету три». Если на трёх последовательных этапах поиска относительные улучшения целевой функции не превышают заданный порог  $\epsilon$ , то найден оптимальный  $X_S$ .

**Схема ВЭА для деревьев.** Для описания схемы алгоритма введем следующие обозначения:  $t$  – счётчик последовательных этапов применения оператора развития;  $S(A_t)$  и  $S(A_t')$  – значения целевой функции до и после очередного этапа соответственно;  $\Delta S(A_t)$  – относительное улучшение значения целевой функции после очередного

этапа;  $\varepsilon = 0.001$  – заданный порог для  $\Delta S(A_t)$ ;  $count = 3$  – число последовательных этапов для останова поиска.

Пусть  $X_{s0}$  – начальный фенотип особи  $A_t$ ;  $S(A_t)$  – значение фитнес-функции. Вещественный эволюционный алгоритм построен по следующей схеме.

1. Обнулить счётчик этапов развития особи:  $t = 0$ .
2. Применить к текущему фенотипу  $X_s$  оператор развития.
3. Вычислить  $\Delta S(A_t) = |(S(A_t) - S(A_{t-1})) / S(A_t)|$ .
4. Если  $\Delta S(A_t) > \varepsilon$ , обновить  $X_s$ ,  $S(A_t) = S(A_{t-1})$  и перейти к 1, иначе  $t = t + 1$ .
5. Если  $t < count$ , перейти к 2, иначе останов.

По экспериментальной оценке в задачах размерности  $n = 10 \div 1000$  требуется от 7 до 9 рестартов по «счёту три» [27]. Оператор развития с конечной нормой имеет сложность  $O(n)$ . При этом максимальное число изменений координат ТШ находится в интервале  $(35 \cdot 10^2, 45 \cdot 10^2)$ . Таким образом, вычислительная сложность ВЭА для деревьев близка к линейной.

Рассмотренный ВЭА разработан для задач с максимальными пропускными способностями коммуникаций и однородной поверхности местности. Практические задачи могут иметь неоднородную поверхность местности и участки, запрещённые для строительства коммуникаций.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Гордеев Э.Н., Тарасцов О.Г. Задача Штейнера. Обзор // Дискретная математика. 1993. Т. 5. Вып. 2. С. 3–28.
2. Hwang F.K., Richards D.S., Winter P. The Steiner tree problem // Annals of Discrete Mathematics. V. 53. North-Holland: 1993, 353 p.
3. Fermat P. de. Maxima et minima (1638). – In: P. Tannery, C. Henry, Oeuvres de Fermat. – Paris, Gauthier-Villars. – 1891. – V. 1. – P. 133–174.
4. Torricelli E. De maximis et minimis, 1646. In: G. Loria, G. Vassura, Opere de Evangelista Torricelli, V. 1, Geometria, pt. 2. – P. 79–97.
5. Cavalieri B. Excercitationes Geometricae. 1647.
6. Simpson T. The Doctrine and Application of Fluxions. – 1750.
7. Jarník V., Kossler M. О minimalnich gratch obeahujících n daných bodů // Cas. Pest. Mat. A Fys. – 1934. – V. 63. – P. 223–235.
8. Courant R., Robbins H. What is mathematics? Oxford University Press, New York, 1941. (Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? М. – Л.: ОГИЗ, 1947.)
9. Gilbert E., Pollak H. Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. – 1968. – V. 16. – P. 1–29. (Гилберт Э.Н., Поллак Г.О. Минимальные деревья Штейнера // Кибернетич. сборник, новая серия. Вып. 8. М.: Мир, 1971.)
10. Ore O. Теория графов. М.: Наука. 1980.
11. Melzak Z.A. On the problem of Steiner // Canad. Math. Bull. – 1961. – V. 4. – P. 143–148.
12. Cockayne E.J. On the Steiner problem // Canad. Math. Bull. – 1967. – V. 10. – P. 43–450.
13. Garey M.R., Johnson D.S. Computer and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. Freeman, San Francisco, 1979. (Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.)
14. Kruskal J.B. On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – V. 7. – P. 501–511.
15. Prim R.C. Shortest connection networks and some generalizations // Bell System Tech. J. – 1957. – V. 36. – P. 1389–1401. (Прим Р. Кратчайшие связывающие сети и некоторые их обобщения // Кибер. сб. 1961. № 2. С. 95–107.)
16. Du D.Z., Hwang F.K. A proof of Gilbert-Pollak Conjecture on the Steiner ratio // Algorithmica. – 1992. – V. 7. – P. 121–135.

17. *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.* The Gilbert-Pollak Conjecture on the Steiner ratio is still open // *Algoritmica*. – 2012. – V. 62. – P. 630–632.
18. *Gilbert E.N.* Minimum Cost Communication Networks // *Bell System Technical Journal*. – 1967. – V. 46. – P. 2209–2227.
19. *Земляченко В.Н.* Задача Штейнера-Вебера с заданной топологией // *Системы автоматизир. проектирования лесотранспорта и лесомелиорации*. Петрозаводск, 1984. С. 17–23.
20. *Кукин В.Д., Кузина В.И.* Методика решения задачи Штейнера с потоками и весами // *Методы математич. моделирования и информационные технологии / Труды ИПМИ КарНЦ РАН*, вып. 2. Петрозаводск, 2000. С. 143–150.
21. *Яблоков А.В., Юсупов А.Г.* Эволюционное чтение: Учеб. для биол. спец. вузов. М.: Высш. шк, 2004.
22. *Воронцов Н.Н.* Развитие эволюционных идей в биологии. М.: Ин-т биологии развития РАН, 2004.
23. *Гродницкий Д.Л.* Две теории биологической эволюции. Саратов: Научная Книга, 2001.
24. *Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В.И.* Теория и практика эволюционного моделирования. М.: Физматлит, 2003.
25. *Herrera F., Lozano M., Verdegay J.* Tackling Real-coded Genetic Algorithms: Operators and Tools for Behavioural Analysis // *Artificial Intelligence Review*. 1998. № 12 (4). P. 265–319.
26. *Michalewicz Z., Logan T., Swaminathan S.* Evolutionary operators for continuous convex parameter space // *Proc. of the 3th Ann. Conf. on Evolutionary Programming*. 1994. P. 84–97.
27. *Кукин В.Д.* Эволюционная модель для задачи Штейнера с потоками и зависящими от них весами // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2008. № 3. С. 115–123.
28. *Кукин В.Д.* Генетические операторы эволюционной модели для потоковой задачи Штейнера // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2010. № 2. С. 74–80.
29. *Кукин В.Д.* О приложении методов эволюционного моделирования к потоковой задаче Штейнера // *Тр. ИПМИ КарНЦ РАН*. Вып. 8. Петрозаводск, 2007. С. 120–130.
30. *Кукин В.Д.* Гипотеза о «большой долине» для потоковой задачи Штейнера // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2015. № 1. С. 72–78.
31. *Кукин В.Д.* Оптимизация поиска деревьев Штейнера в потоковой задаче Штейнера // *Тр. КарНЦ РАН*. 2018. № 7. С. 40–45.
32. *Растригин Л.А.* Системы экстремального управления. М.: Наука, 1974.
33. *Кукин В.Д.* Локальная оптимизация лесотранспортной сети с помощью аналога задачи Штейнера // *Системы автоматизир. проект. лесотранспорта и лесомелиорации*. Петрозаводск: Карельский филиал АН СССР, 1984. С. 12–17.

34. *Beasley J.E.* OR-Library: distributing test problems by electronic mail // J. Oper. Res. Soc. 1990. V. 41. № 11. P. 1069–1072.
35. *Reidys C.M., Stadler P.F.* Combinatorial Landscapes // SIAM Review. 2002. N 44. P. 3–54.
36. *Boese K. D., Kahng A. B., Muddu S.* A New Adaptive Multi-start Technique for Combinatorial Global Optimizations // Oper. Res. Lett. 1994. V. 16. N 2. P. 101–114.
37. *Ikeda K., Kobayashi S.* GA Based on UV-structure Hypothesis and its Application to the JSP // Parallel Problem Solving from Nature. PPSN VI. Paris. 2000. P. 273–282.
38. *Streeter M.J., Smith S.F.* How the Landscapes of Random Job Shop Scheduling Instances Depends on the Ratio of Jobs to Machines // J. of Art. Intell. Res. AAAI Press. 2006. Vol. 26. P. 247–287.
39. Кластер КарНЦ РАН: <http://cluster.krc.karelia.ru/section.php?id=2>.
40. *Лотарев Д. Т., Супрун А. В., Уздемир А. П.* Локальная оптимизация в задаче Штейнера на евклидовой плоскости // Автомат. и телемех. 2004. Вып. 7. С. 60–70.

## СПИСОК ТАБЛИЦ

Табл. 1. Число полных топологий дерева Штейнера

Табл. 2. Сравнение алгоритмов АНП и АГМ

Табл. 3. Среднее время генерации пар поколений популяции (мин)

Табл. 4. Доверительные интервалы

## СПИСОК ИЛЛЮСТРАЦИЙ

Рис. 1. Дерево с тремя полными компонентами

Рис. 2. Струнная модель

Рис. 3. Модель мыльной плёнки

Рис. 4. Два дерева с одинаковой топологией

Рис. 5. Углы, образованные дугами с весами  $w_1, w_2, w_3 > 0$

Рис. 6. Полное ДШ в задаче без потоков,  $n = 250$

Рис. 7. Полное ДШ в задаче с потоками,  $n = 250$

Рис. 8. Обобщённая схема эволюционной модели

Рис. 9. Начальное дерево с полной топологией

Рис. 10. Единичная переброска дуги

Рис. 11. Результат оптимизации координат ТШ

Рис. 12. Дерево Штейнера после оператора кроссинговера

Рис. 13. Лучшее решение задачи

Рис. 14. Дерево с топологией  $T_0$

Рис. 15. Дерево после простейшей мутации

Рис. 16. Дерево после циклической мутации

Рис. 17. Дерево после рекомбинации

Рис. 18. Сравнение конфигураций ДШ

Рис. 19. Распределение топологий МДШ в задачах с потоками

Рис. 20. Распределение топологий МДШ в задачах без потоков

Рис. 21. Заполнение элитной группы в задачах с потоками и без потоков

Рис. 22. ЛМДШ в задаче с потоками

Рис. 23. МДШ в задаче с потоками

*Научное издание*

**Кукин Валерий Дмитриевич**

**Потоковая задача Штейнера.  
Эволюционный подход**

Учебное пособие

*Печатается по решению Ученого совета  
ИПМИ КарНЦ РАН*

*Издано в авторской редакции*

Подписано в печать 30.03.2021. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.

Уч.-изд. л. 2,8. Усл. печ. л. 3,49.

Тираж 100 экз. Заказ № 650.

Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр Российской академии наук»  
Редакционно-издательский отдел  
185003, г. Петрозаводск, пр. А. Невского, 50



**Кукин Валерий Дмитриевич** родился 26 февраля 1942 г. в городе Вязники Владимирской области. В 1966 г. окончил механико-математический факультет Горьковского университета им. Н. И. Лобачевского. Большая часть его трудовой деятельности связана с Карельским научным центром РАН (г. Петрозаводск).

Основное направление научной деятельности автора – математические методы оптимизации коммуникационных (транспортных и энергетических) сетей на модели потоковой задачи Штейнера. Он разработал оригинальный эволюционный подход к решению этой задачи, который включает: эволюционную модель; кодирование полных топологии деревьев Штейнера; не имеющий аналогов алгоритм исчерпывающего и неизбыточного перебора полных топологий; генетические и вещественные операторы; композитный эволюционный алгоритм.